UNIVERSIDADE DE LISBOA

INTITUTO DE EDUCAÇÃO

A CAPACIDADE DE GENERALIZAÇÃO NO ESTUDO DAS FUNÇÕES NO 8.º ANO

Andreia Margarida Guerreiro Mateus

Relatório

MESTRADO EM EDUCAÇÃO

Área de Especialização em Didática da Matemática

2013

UNIVERSIDADE DE LISBOA

INTITUTO DE EDUCAÇÃO

A CAPACIDADE DE GENERALIZAÇÃO NO ESTUDO DAS FUNÇÕES NO 8.º ANO

Andreia Margarida Guerreiro Mateus

Relatório de Mestrado orientado

pela Professora Doutora Hélia Margarida Aparício Pintão Oliveira

MESTRADO EM EDUCAÇÃO

2013

Resumo

Este relatório foi realizado no âmbito de uma unidade de ensino sobre os tópicos das sequências e das funções, no contexto da qual se efetuou um estudo exploratório sobre a capacidade de generalização dos alunos do 8.º ano. Para tal, foram identificadas três questões orientadoras deste estudo: *Como se evidencia a capacidade de generalização dos alunos? Que estratégias de generalização usam?* e *Que dificuldades apresentam nesse processo?*.

O presente trabalho apresenta uma natureza qualitativa e é baseado numa unidade de ensino dinamizada no 2.º período e em três estudos de caso referentes a alunos com desempenhos académicos distintos. A recolha de dados foi baseada nos registos escritos dos alunos e da autora deste relatório, e nas gravações audiovisuais das aulas e das entrevistas realizadas aos alunos após a implementação da proposta pedagógica.

Através da análise dos dados recolhidos, pôde-se verificar que os alunos apresentam indícios de raciocínios importantes que antecedem o culminar do processo de generalização através da representação algébrica, nomeadamente, raciocínios inversos para verificar a existência de imagens, verbalização de relações entre variáveis e utilização das mesmas para determinar imagens, conversão entre diferentes tipos de representações das funções, atribuição de significados a objetos matemáticos associados a procedimentos algébricos e processos de tentativa e erro orientados pela descoberta prévia de uma relação entre as variáveis dependente e independente. Em relação às estratégias, os alunos utilizaram quer raciocínios próprios, quer procedimentos aprendidos nas aulas. Numa análise preliminar das tarefas, os alunos concentraram-se em relações essencialmente recursivas, no entanto, rapidamente evoluíram nos seus raciocínios, procurando e reconhecendo, quase sempre, relações pertinentes para a determinação de uma regra geral, que têm a preocupação de testar. Em relação às dificuldades mais presentes no raciocínio dos alunos, estas prendem-se essencialmente com a incapacidade de estenderem o domínio das situações descritas a valores intermédios, com a transição entre o concreto e o abstrato e com a falta de hábito de justificar verbalmente ou através da escrita os seus raciocínios, o que por vezes se tornou uma dificuldade na apresentação de fundamentações explícitas.

Palavras-chave: Generalização, estratégias, dificuldades, álgebra, funções, 8.º ano.

Abstract

This report was developed as a result of an exploratory study on the generalization ability of students of the 8^{th} grade based on a teaching unit on sequences and functions. To this end, three guiding questions were identified: *How can one perceive student's ability to generalize? What generalization strategies do they use?* and *What difficulties do they exhibit in that process?*

This work presents a qualitative nature and is based on a teaching unit taught in the 2nd term and three case studies of students with different academic performances. Data collection was based on: records of the author of this report, students' written records, audiovisual recordings of classes and of interviews with students after the implementation of the educational proposal.

Through the analysis of the data collected it was observed that students exhibit signs of relevant reasoning which precedes the culmination of the process of generalization through algebraic representation. For instance, reasoning backward to check for pictures, verbalizing relations between variables and use them to determine images, conversion between different types of representations of functions, assigning meanings to mathematical objects associated with algebraic procedures and processes of trial and error learning guided by the previous discovery of a relation between the dependent and independent variables.

Regarding the strategies, students used their own reasoning as well as procedures learned in class. In a preliminary analysis of the tasks students focused on recursive relations essentially. However, they quickly evolved in their reasoning, almost always looking for and recognizing relevant relations to the determination of a general rule that they sought to test. Regarding the difficulties that are present in most students' reasoning, these are mainly: the inability to extend the mastery of the situations described to intermediate values, the transition between the concrete and the abstract, and the lack of the habit of justifying their arguments verbally or through writing. This sometimes became a difficulty in presenting explicit reasoning.

Keywords: Generalization, strategies, difficulties, algebra, functions, 8^{th} grade.

Agradecimentos

À minha orientadora, Professora Doutora Hélia Oliveira, pela disponibilidade, motivação e forma como orientou este trabalho facultando-me textos originais e fazendo sugestões e comentários pertinentes.

Aos alunos da turma onde dinamizei este trabalho, e em particular aos três alunos entrevistados, agradeço o empenho, a disponibilidade, o interesse, o contributo e a preocupação para que tudo corresse da melhor forma.

Agradeço também aos elementos da escola que possibilitaram a realização deste trabalho, nomeadamente à diretora e aos encarregados de educação que prontamente autorizaram tudo o que fosse necessário para a concretização com sucesso deste estudo.

À Patrícia pela constante troca de experiências sobre as nossas aulas de Matemática e em particular, pelo modo dedicado e atento como sempre opinou sobre o meu trabalho.

À Raquel, pela revisão exemplar.

À Ana e à Ascensão que me encorajaram e estiveram sempre disponíveis para me transmitirem informações sobre este Mestrado.

A todos os meus amigos que manifestaram a sua preocupação e se interessaram pelo andamento do meu trabalho.

À minha família pelo encorajamento constante e pelas ausências ao longo deste ano de trabalho.

E ao Bruno, a quem dedico este trabalho, por ser sempre um pilar de apoio, pelos momentos de indisponibilidade e pela paciência incondicional em particular, neste ano letivo tão delicado.

Índices

Índice geral

Índice de figuras

Índice de tabelas

Índice de anexos

1. Introdução

Neste capítulo, para além de uma apresentação global do trabalho onde apresento os objetivos do mesmo, dou principal ênfase às razões que orientaram e suportaram o meu estudo a nível pessoal e curricular.

1.1. Motivações e pertinência do estudo

A Matemática é uma disciplina que desde cedo me fascinou. No ensino primário os números saltaram-me à vista pela pertinência da sua utilização, e mais tarde deparei-me com aquela letra que o meu irmão, nove anos mais velho, utilizava como se fosse um número e que também passei a utilizar para exprimir vários raciocínios. Por estes motivos esta disciplina conseguiu-me despertar a atenção e acompanhar-me ao longo da minha vida.

Atualmente, considero a Matemática como uma área que é fundamental na vida quotidiana, quer direta ou indiretamente. Nas minhas aulas, para além de salientar esta necessidade constante de utilização da Matemática nas mais diversas áreas, tento transmitir a ideia de que ela faz parte do património histórico da humanidade, construído ao longo de um período muito longo, e que atualmente somos privilegiados em poder ter séculos de pesquisa aos nossos pés. Como professora, penso que é meu dever transmitir esta ideia às novas gerações.

É com base neste fascínio que tento, na medida do possível, ajudar os meus alunos a aprender a pensar através da Matemática. Este mestrado permitiu-me perceber que, um pouco por todo o mundo, vários investigadores na área da educação matemática, preocupados com as dificuldades apresentadas pelos alunos no tema da Álgebra, têm desenvolvido trabalhos com vista a contribuir para uma aprendizagem mais eficaz desta temática. A nível internacional, encontrei diversos trabalhos, de entre os quais destaco os de Kaput (1999), que se concentram no ensino da Álgebra através da criação de ambientes de sala de aula que permitam aos alunos aprender com compreensão. Também a nível nacional deparei-me com diversos trabalhos, destacando os de Ponte, Branco e Matos (2009a) que se baseiam em formas diferentes de trabalhar com a Álgebra, captando a atenção dos alunos e promovendo efetivamente a sua aprendizagem. Destes e de outros trabalhos têm resultado vários contributos pertinentes relacionados com o pensamento dos alunos, as estratégias que utilizam, as dificuldades que apresentam, o tipo de tarefas e de aulas a dinamizar pelos professores, e que atualmente influenciam o ensino da Álgebra.

De forma idêntica, a realização deste meu trabalho também surge pela minha inquietação enquanto professora preocupada com o sucesso dos meus alunos em Matemática, e em particular no tema da Álgebra, e estando ciente da importância desta disciplina no prosseguimento de estudos e consequentemente na escolha de uma profissão no futuro.

Esta ideia da pertinência do estudo da Álgebra também é defendida pelos Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2007), onde é referido que, em particular, a competência algébrica revela-se importante na vida adulta, quer no trabalho, quer no acesso/preparação para o ensino superior. Também Ponte (2006) corrobora esta perspetiva, frisando que a compreensão da linguagem abstrata da Álgebra é fundamental nas opções escolares e profissionais dos alunos e no seu exercício de cidadania democrática. Assim sendo, o papel do professor é ajudar a construir uma base sólida, que deve ser baseada na compreensão e na própria construção do conhecimento.

Segundo o NCTM (2007), a Álgebra é considerada um fio condutor curricular desde os primeiros anos de escolaridade, onde o professor deve selecionar, implementar e apresentar tarefas que maximizem o potencial de aprendizagem do aluno, ajudando-o a criar uma base sólida assente na sua compreensão e nas suas experiências. A Álgebra é um tema fundamental do ensino da Matemática onde se constatam grandes dificuldades por parte dos alunos ao longo dos vários ciclos, facto que compromete a motivação e evolução dos alunos neste temática, e em geral na disciplina de Matemática.

Segundo Kaput (1999), as principais dificuldades apresentadas pelos alunos ao nível da Álgebra prendem-se com o facto de os símbolos acabarem por perder a sua ligação ao concreto, o que posteriormente se reflete em erros frequentes na manipulação algébrica dos mesmos. De acordo com o estudo de Cunha (2010), a transição entre a linguagem natural e a linguagem algébrica também é um dos obstáculos apontados, manifestando-se mais tarde em dificuldades ao nível da interpretação do significado das letras.

De acordo com o que tem vindo a ser verificado nos resultados dos testes intermédios e exames nacionais, a Álgebra ressalta como uma das áreas temáticas em que existe maior necessidade de reforçar a intervenção didática. Também baseado na minha experiência profissional tenho constatado que este é o tema onde os alunos apresentam maiores dificuldades. Tenho verificado que muitos alunos não conseguem entender a linguagem própria da Matemática, a representação simbólica, bem como não conseguem dar significado aos conceitos e procedimentos algébricos que lhes são ensinados.

Foi face a todas estas constatações que decidi enveredar por trabalhar a temática do desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, dando prioridade à compreensão dos processos de raciocínio e das dificuldades apresentadas, em particular à capacidade de generalização. Deste modo, espero conseguir aperfeiçoar as estratégias de ensino utilizadas em sala de aula, de forma a contribuir para a construção de uma base sólida do trabalho algébrico, assente na compreensão e na experiência dos próprios alunos.

Com a realização deste estudo, contribuirei para o meu desenvolvimento pessoal e principalmente profissional, e espero também dar a conhecer um pouco melhor esta problemática sobre a aprendizagem dos alunos ao nível do processo de generalização a toda a comunidade educativa.

1.2. Apresentação do estudo

Este relatório tem por base uma unidade de ensino no âmbito do ensino e da aprendizagem da Álgebra, que visa dinamizar o trabalho com sequências e funções numa turma do 8.º ano do ensino básico. Estando consciente de que é fundamental conhecer as ideias atuais em relação ao ensino e aprendizagem da Matemática, e em particular da Álgebra, a proposta pedagógica criada neste estudo foi baseada nas orientações do currículo nacional do ensino básico e do Programa de Matemática do Ensino Básico em vigor (ME, 2007), no ano letivo em que foi concretizada (2012/13), e em investigações empíricas relacionadas com a temática em causa.

A unidade de ensino inicialmente pensada para abordar apenas o tema das Funções, foi alargada ao tema das Sequências em virtude deste não ter sido lecionado no 7º ano de escolaridade e de estar ciente de que o trabalho com as sequências é uma base para o desenvolvimento da capacidade de generalização e um alicerce do estudo das funções. Por outro lado, a exploração das sequências permitiu-me aplicar de forma contextualizada e encadeada os conhecimentos prévios sobre expressões algébricas e equações e dar-me-á suporte ao trabalho a desenvolver no tópico "Operações com polinómios". Desta forma, lecionando estes temas tornaria possível, sem comprometer a planificação anual, o cumprimento do propósito principal deste trabalho.

Assim sendo, de acordo com as orientações do programa de Matemática do ensino básico, foi elaborada uma proposta pedagógica que privilegiasse a partilha das experiências matemáticas dos alunos, a predisposição destes para explorar e reconhecer regularidades formulando generalizações em contextos matemáticos e não matemáticos, a compreensão das relações entre variáveis e a sua representação de vários modos, através de regras verbais, tabelas, gráficos e expressões algébricas e, por fim, a sensibilidade para entender o uso de funções como forma de modelar situações do mundo real.

Desta forma, foram utilizadas tarefas de caráter exploratório, relacionadas com o estudo de padrões, regularidades e funções, proporcionando aos alunos o desenvolvimento da capacidade de generalização através de um contexto de aprendizagem significativo. Seguindo as indicações metodológicas referidas no PMEB (2007), privilegiei tarefas envolvendo atividades de simbolização e de modelação, que partissem de experiências informais e progredissem para processos de manipulação algébrica formal. Nas tarefas apresentadas aos alunos foi dada importância às múltiplas representações gráfica, algébrica e tabelar, que, tal como Oliveira (2009) refere, contribuem para a utilização progressiva do simbolismo algébrico. Por outro lado, a organização das tarefas também teve em conta a articulação entre os vários tópicos da Álgebra, através do encadeamento entre as sequências e as funções que se apoia na ideia da autora de que o estudo das sequências é "um alicerce importante para o desenvolvimento do pensamento funcional e constitui um contexto adequado para dar sentido à equivalência de expressões algébricas, bem como às regras de simplificação das mesmas" (p.85).

Com o objetivo de aprofundar o meu conhecimento sobre o pensamento algébrico dos alunos, na unidade de ensino "Sequências e Funções" do 8.º Ano, desenvolvi um estudo exploratório sobre a capacidade de generalização dos alunos, visando compreender este processo. Para tal, foram identificadas as seguintes questões orientadoras deste estudo:

- *Como se evidencia a capacidade de generalização dos alunos?*

- *Que estratégias de generalização usam?*

- *Que dificuldades apresentam nesse processo?*

Este estudo vai ao encontro das minhas preocupações, e das de muitos professores e investigadores em Educação Matemática, que, com o intuito de melhorar as metodologias e contribuir para o sucesso em Matemática, analisam o raciocínio e a aprendizagem dos alunos no tema da Álgebra.

O presente relatório incide, pois, sobre a minha prática profissional, onde assumo o papel de investigadora e professora participante no estudo, e foi dinamizado numa turma de 8.º ano durante o segundo período do ano letivo de 2012/2013.

1.3. Estrutura do relatório

O presente trabalho está organizado em seis capítulos. A seguir à introdução, o presente capítulo, será realizado o enquadramento teórico que serve de suporte a este estudo e é baseado nas orientações curriculares para o ensino da Matemática e na literatura de referência sobre as questões em foco na análise e reflexão realizadas. No terceiro capítulo serão apresentados a metodologia e os procedimentos adotados, bem como será feita uma breve referência ao contexto escolar onde decorreu este estudo e caraterizados a turma participante e os alunos caso. De seguida, no quarto capítulo, que se refere à concretização letiva, apresentar-se-á a planificação da unidade de ensino e far-se-á uma breve descrição da concretização das aulas. O quinto capítulo refere-se à análise de dados realizada, de acordo com os objetivos do estudo. Por fim, serão apresentadas as principais conclusões do estudo, assim como uma reflexão sobre o trabalho realizado.

2. Enquadramento curricular e didático

Neste capítulo, baseado nas orientações curriculares para o ensino da Álgebra e na literatura de referência sobre a didática desta temática, procura-se realizar um enquadramento teórico das principais opções metodológicas que nortearam a unidade de ensino e a prática letiva, assim como a análise de dados e reflexões subsequentes. Com efeito, organizou-se este capítulo em quatro secções. A primeira secção refere-se à Álgebra no currículo e no programa do ensino básico, onde são referidas as orientações curriculares e programáticas deste tema a nível nacional e internacional. De seguida, é apresentada uma secção sobre sequências e funções, tópicos do programa nos quais incide o trabalho realizado. A terceira secção faz uma revisão de literatura sobre o pensamento algébrico e por último, é realizada uma clarificação do conceito de generalização, dando especial ênfase às definições sugeridas por vários autores, ao processo, às dificuldades e às estratégias apresentadas pelos alunos, que servirão de suporte a este estudo.

2.1 Orientações curriculares para o ensino da Álgebra

Ao longo dos tempos tem-se verificado que os resultados obtidos pelos alunos na disciplina de Matemática não são animadores. Em particular no tema da Álgebra, este insucesso parece estar mais presente, o que poderá estar relacionado com um ensino baseado em práticas rotineiras, de aplicação de regras e procedimentos desprovidos de significado para a maioria dos alunos. Segundo o NCTM (2007), a Álgebra não se resume à mera manipulação de símbolos, pois é necessária a compreensão e a atribuição de significado a esses símbolos. Para tal, "os alunos necessitam de compreender os conceitos algébricos, as estruturas e os princípios que regem a manipulação simbólica, e o modo como os próprios símbolos podem ser utilizados" (p. 39).

Em virtude da Álgebra ser um dos grandes temas da disciplina de Matemática, a forma como esta tem vindo a ser encarada tem evoluído ao longo dos anos. Assim sendo, no passado este tema teve como grande objetivo a manipulação dos símbolos, com forte ênfase memorização de um conjunto de regras e na formalização de problemas. Esta ideia, tal como Kaput (1999) refere, falha na dimensão da compreensão, em virtude dos procedimentos estarem desligados do conhecimento matemático e do quotidiano dos alunos. No entanto, atualmente esta visão da Álgebra foi abandonada, evoluindo da aplicação de um conjunto de procedimentos para uma forma de pensar que, tal como Ponte (2006) refere, tem como objetivo o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, centrado nas várias relações entre os objetos, relações estas que devem ser descobertas pelos alunos através das suas experiências e em articulação com o seu próprio conhecimento.

Por outro lado, tal como é referido em Ponte e Sousa (2010), a Álgebra também sofreu alterações a nível da organização temática no programa de Matemática do ensino básico (ME, 2007). Com efeito, enquanto anteriormente este tema estava limitado apenas ao 3.º ciclo, atualmente foi alargado aos restantes ciclos anteriores, sendo trabalhadas algumas ideias no 1.º ciclo, mais propriamente no tema "Números e operações", e aparecendo já como tema no 2.º ciclo, onde se institucionaliza o uso da linguagem algébrica. No 3.º ciclo, são depois enfatizadas capacidades como a generalização, a simbolização e a modelação. Este trabalho desenvolvido desde cedo ao nível da Álgebra, tem como objetivo contribuir para um maior sucesso na aprendizagem dos alunos neste tema, nomeadamente constituindo uma base sólida para a compreensão do conceito de função, que vai sendo ampliada ao longo dos ciclos.

Desta forma, tal como é referido por Oliveira (2009), o novo programa apresenta-nos "uma nova forma de olhar a Álgebra escolar", baseada no desenvolvimento do pensamento algébrico, onde a Álgebra surge como tema individualizado, e é considerada como "forma de pensamento matemático, desde os primeiros anos" (ME, 2007). Segundo a autora, são de destacar várias ideias que marcam a diferença no atual programa, nomeadamente:

> (i) os alunos podem começar a pensar algebricamente mais cedo no seu percurso escolar;
>
> (ii) a capacidade de generalização é um aspeto central na Álgebra e na Matemática, em geral, que ganha em se promovida desde as etapas iniciais do ensino básico;
>
> (iii) a utilização de simbolismo algébrico deve ser progressiva, sendo que as múltiplas representações têm um papel importante nesse contexto;
>
> (iv) deve existir uma forte articulação e continuidade entre os vários tópicos da Álgebra.
>
> (p.84)

De acordo com o NCTM (2007), ao nível do ensino básico, os alunos devem aprender Álgebra "como um conjunto de conceitos e capacidades associadas à representação de relações quantitativas e, também, como um estilo de raciocínio matemático utilizado na formalização de padrões, funções e generalizações" (p. 263). Esta ideia reforça a necessidade de compreensão das ideias matemáticas, nomeadamente, os conceitos e princípios algébricos, por parte dos alunos ao longo da sua aprendizagem.

Kaput (1999) refere que a Álgebra assenta em quatro componentes: o estudo das relações funcionais; o estudo e a generalização de padrões e relações numéricas; o desenvolvimento e manipulação do simbolismo; e a modelação. Deste modo, e com o objetivo de criar condições favoráveis à plena aprendizagem da Álgebra, o NCTM (2007) enuncia cinco normas para a Álgebra em torno das quais se deve organizar o trabalho a realizar com os alunos de todos os níveis de ensino:

> a) Compreender padrões, relações e funções;
>
> b) Representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos;
>
> c) Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas;
>
> d) Analisar a variação em diversos contextos.
>
> (p. 39)

De acordo com esta linha de pensamento também o currículo nacional do ensino básico (ME, 2001) considerava que a competência matemática ao longo dos ciclos se baseia na predisposição que os alunos devem ter para explorar situações que lhes são problemáticas, para procurar regularidades, para explorar padrões numéricos e geométricos, para enunciar e testar conjeturas, para formular generalizações, para representar e interpretar informação de diversas formas e para pensar de maneira lógica. Em particular, no domínio da Álgebra ao nível do terceiro ciclo, existem aspetos mais específicos a considerar, que estão relacionados com os tópicos das equações, das inequações e das funções, nomeadamente:

> a) O reconhecimento do significado de fórmulas no contexto de situações concretas e a aptidão para usá-las na resolução de problemas;
>
> b) A aptidão para usar equações e inequações como meio de representar situações problemáticas e para resolver equações, inequações e sistemas, assim como para realizar procedimentos algébricos simples;

c) A compreensão do conceito de função e das facetas que pode representar, como correspondência entre conjuntos e como relação entre variáveis;

d) A aptidão para representar relações funcionais de vários modos e passar de uns tipos de representação para outros, usando regras verbais, tabelas, gráficos e expressões algébricas e recorrendo, nomeadamente à tecnologia gráfica;

e) A sensibilidade para entender o uso de funções como modelos matemáticos de situações do mundo real, em particular nos casos em que traduzem relações de proporcionalidade direta e inversa.

(p.67)

De acordo com o Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), o propósito principal do ensino da Álgebra no 3.º ciclo é desenvolver nos alunos a linguagem e o pensamento algébricos. Assim sendo, com a aprendizagem realizada ao nível deste tema, os alunos devem:

a) ser capazes de interpretar e representar situações em contextos diversos, usando linguagem e procedimentos algébricos;

b) compreender o conceito de função e ser capazes de o usar em diversas situações, em particular de proporcionalidade direta e inversa;

c) ser capazes de interpretar fórmulas em contextos matemáticos e não matemáticos;

d) ser capazes de resolver problemas, comunicar, raciocinar e modelar situações recorrendo a conceitos e procedimentos algébricos.

(p. 55)

Vários investigadores, preocupados com as dificuldades de aprendizagem dos alunos manifestadas ao nível da Álgebra, têm desenvolvido vários estudos com vista a encontrar uma forma mais produtiva de trabalhar este tema. Muitos dos estudos realizados, tais como Santos (2008), Branco (2008) e Barbosa (2010) mencionam a exploração de padrões como essencial para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, uma vez que podem contribuir significativamente para o desenvolvimento de estratégias próprias, que partem da análise de casos particulares, permitem a organização da informação e o estabelecimento de conjeturas que culminam na generalização.

Segundo as indicações metodológicas do PMEB (2007), devem proporcionar-se aos alunos experiências informais antes da manipulação algébrica formal, discutir-se resultados, processos e ideias oralmente e por escrito, de forma a contribuir para o trabalho autónomo dos alunos e para um maior envolvimento nas tarefas e, posteriormente, na elaboração do seu conhecimento matemático. Por outro lado, de forma a reforçar o papel dos contextos como ponto de partida das aprendizagens, devem-se ir estabelecendo conexões com outros temas da Matemática e com contextos extramatemáticos.

Segundo Kaput (1999), os professores devem criar ambientes de sala de aula que permitam a todos os alunos aprender com compreensão, sugerindo que se deve: começar a trabalhar aspetos algébricos desde cedo, partindo do conhecimento informal dos alunos; integrar a aprendizagem da Álgebra com a aprendizagem de outros assuntos, de forma a mostrar utilidade desta área da Matemática; explorar os diferentes tipos de pensamento algébrico; criar condições para que os alunos criem naturalmente o seu conhecimento matemático, articulando-o com o seu "poder cognitivo" e as suas experiências; e encorajar a aprendizagem ativa através da compreensão e do estabelecimento de conexões.

De forma a atenuar as dificuldades que os alunos manifestam devem explorar-se situações variadas em que surjam letras e se discutam os seus significados, contribuindo para uma transição progressiva da linguagem natural para a matemática. Assim, será possível compreender a manipulação simbólica envolvida e conseguir uma apropriação mais profunda do conhecimento. Em relação às tarefas, estas devem privilegiar a investigação e a exploração, sendo apresentadas por complexidade crescente e não desprezando procedimentos algébricos de rotina.

Arcavi (2008) defende que o ensino da Álgebra deve ser motivo de preocupação e objeto de investigação de todos os professores. O autor considera que ao aprender Álgebra o aluno adquire "poder" sobre situações problemáticas que possam surgir, que lhe confere capacidade de evoluir no seu próprio conhecimento e sensação de autonomia na resolução de vários problemas. De acordo com esta ideia, todos os alunos devem aprender Álgebra, uma vez que esta permite a aquisição de competências que se revelam importantes ao longo da vida, tendo o professor um papel de extrema importância na dinamização de uma cultura de trabalho na sala de aula que privilegie a compreensão e a experiência dos alunos.

2.2 As sequências e as funções

Apesar de a Matemática ser uma ciência tão ampla ao nível do seu objeto de estudo, esta é pertinentemente caraterizada pela célebre frase "Matemática, a ciência dos padrões" (Devlin, 2003).

A noção de padrão é também facilmente identificada no nosso quotidiano, através de uma ordenação de formas, de cores, etc., como uma regularidade existente entre objetos, destacando-se a ideia de ordem.

Atualmente, quer o NCTM (2007), quer o PMEB (2007), dão grande destaque ao estudo de padrões, dadas as suas potencialidades na aprendizagem da noção de variável. No programa esta noção é abordada ao longo de todos os ciclos, tomando principal destaque no tópico das Sequências do 3.º ciclo. Neste tópico exploram-se conjuntos de objetos com as mesmas caraterísticas matemáticas onde podemos encontrar regularidades e estabelecer generalizações.

Tal como Matos (2007) refere, uma sequência pode ser considerada como o conjunto ordenado dos termos de uma determinada sucessão. De acordo com Ponte, Branco e Matos (2009a) existem vários tipos de sequências. Por um lado, existem as sequências pictóricas, representadas a partir de figuras e onde os alunos podem procurar relações baseadas em propriedades geométricas das figuras, ou as numéricas apresentadas por conjuntos de números que permitem estabelecer relações funcionais. Por outro lado, podemos também classificar as sequências como repetitivas ou crescentes. As primeiras, quando existe uma unidade que se repete num ciclo, através das quais "os alunos têm oportunidade de continuar a representação, procurar regularidades e estabelecer generalizações" (p. 41) e as segundas, que são representadas por termos diferentes que se obtêm a partir dos anteriores e dependem da sua posição na sequência.

Segundo Ponte, Branco e Matos (2009a), nos 2.º e 3.º ciclos, o trabalho com sequências pode incidir sobre os seguintes aspetos específicos:

> (i) Continuar a representação de uma sequência (representando os termos imediatamente a seguir aos termos dados);
>
> (ii) Descrever os termos de uma sequência pictórica de acordo com a sua ordem (com base na análise das propriedades de cada figura da sequência);

> (iii) Usar a relação entre o modo de constituição de cada termo e a sua ordem na sequência para indicar o termo de uma dada ordem (geralmente mais distante) e para indicar a ordem de um termo dado;
>
> (iv) Expressar essa relação em linguagem natural (generalizar);
>
> (v) Representar o termo geral da sequência numérica associada a uma sequência pictórica (no 3.º ciclo, usando a linguagem algébrica);
>
> (vi) Determinar o termo geral de uma sequência numérica;
>
> (vii) Escrever os termos da sequência numérica dado o seu termo geral.
>
> (p. 58)

De forma a facilitar o processo de generalização e contribuir para a compreensão dos símbolos e da manipulação algébrica, deve dar-se oportunidade aos alunos de explorarem diferentes tipos de sequências, inicialmente recorrendo a padrões visuais, que estimulem a manipulação das figuras e consequentemente a descoberta de caraterísticas das mesmas. De acordo com esta ideia, Barbosa (2011) defende que o trabalho realizado pelos alunos quando envolve exploração de padrões em contextos visuais, permite que os alunos recorram a estratégias próprias resultantes de diferentes interpretações, estabeleçam relações entre contextos visuais e numéricos e desenvolvam um raciocínio mais flexível nos padrões numéricos.

O trabalho com sequências é considerado como fundamental para o desenvolvimento da noção de variável e, por esta razão e de acordo com o PMEB (2007), este tópico está presente ao longo de todo o ensino básico, sendo trabalhado de forma gradual. Este tópico integra o tema Números e operações no 1.º ciclo, através da exploração de regularidades numéricas e sua descrição através da linguagem natural e no 2.º e 3.º ciclos e faz parte do tema da Álgebra, onde é trabalhada a capacidade de abstração dos alunos, através do uso da linguagem simbólica e mais tarde da algébrica para expressar generalizações.

Tal como é referido em Barbosa (2011),

> as tarefas que têm subjacente a exploração de padrões podem contribuir para o desenvolvimento de capacidades próprias da resolução de problemas, já que implicam a análise de casos particulares, a organização de informação forma sistemática, o estabelecimento de conjeturas e a generalização de resultados.
>
> (p. 328)

Também Mestre e Oliveira (2011) defendem que a exploração de padrões é um contexto favorável ao desenvolvimento da capacidade de generalização, em virtude de promover a identificação de caraterísticas comuns e posteriormente de relações entre variáveis. Segundo Ponte, Branco e Matos (2009a), o trabalho de cunho exploratório realizado com o estudo de sequências, estimula naturalmente a procura de relações entre objetos, apelando ao desenvolvimento das capacidades de abstração e de generalização, facto que contribui para o desenvolvimento da compreensão das noções de variável e função. Assim sendo, a aprendizagem da noção de função vai sendo construída ao longo dos ciclos, juntamente com a exploração da ideia de padrão e o desenvolvimento do tópico das sequências, que em particular são funções de variável natural. As aprendizagens efetuadas no tópico das sequências são alicerces fundamentais na construção do conceito de função, também baseado na noção de variação e relação entre variáveis.

O conceito de função é de extrema importância quer na própria Matemática, quer na interpretação do mundo que nos rodeia. Segundo Kaput (1999), a noção de função tem origem no nosso senso de crescimento e de variação, onde uma quantidade varia em conjunto com outra. Esta ideia incorpora várias análises, todas recolhidas dentro de uma única entidade, tais como uma lista, uma tabela ou um gráfico, e é um processo que também envolve a generalização, que pode ser estimulada desde os anos iniciais através de experiências matemáticas relacionadas com situações do dia-a-dia.

Smith (2003), citado em Matos (2007), defende que uma função pode ser encarada de dois modos distintos. Por um lado, como uma correspondência entre valores de variáveis (pares ordenados), representada através de uma expressão algébrica, por outro lado, como uma covariação entre duas grandezas, através da análise do modo como a variação dos valores de uma variável produz alterações nos valores da outra. Estes dois modos de entender uma função geram dificuldades nos alunos, que veem este conceito como confuso e abstrato. É óbvio que a estratégia deve passar pela compreensão desta variação, explorando as diversas representações (gráfica e tabular) e progressivamente introduzindo a sua formalização, tentando assim minimizar as dificuldades apresentadas pelos alunos.

Também Doorman et al. (2012) defendem que, em virtude de existirem diferentes formas de encarar as funções, ensinar este conceito aos alunos torna-se um desafio pedagógico. Os autores referem que o ensino das funções pode ter um caráter operacional, presente nos anos iniciais, e um caráter estrutural posteriormente. O caráter operacional é um processo matemático que permite transformar um valor noutro, funcionando como o *input* versus *output* de uma máquina, enquanto o caráter estrutural, é caraterizado pela construção de objetos matemáticos (os pares ordenados), uma ideia mais abstrata. Segundo os autores, por várias vezes a aprendizagem dos alunos fica-se pelo aspeto operacional. Como tal, e para melhorar a transição entre estas duas formas de encarar as funções, os autores sugerem que se inicie o ensino deste tema trabalhando inicialmente as funções como um processo de cálculo (*input* versus *output*), evoluindo para a ideia de função como um processo dinâmico de covariação entre as variáveis, recorrendo a gráficos e a tabelas e ao trabalho com o computador. Desta maneira, tornar-se-á mais fácil encarar as funções de forma mais abstrata, como um objeto matemático, que é o que se pretende finalmente.

Segundo Ponte, Branco e Matos (2009a), o estudo das funções, que apenas assume um papel de destaque no programa no 3.º ciclo, visa compreender a noção de função, como uma relação entre variáveis, bem como a capacidade de usá-la na resolução de problemas reais, através da modelação de situações do quotidiano. São estudados diferentes tipos de funções, nomeadamente as afim, lineares e não lineares, as de proporcionalidade inversa e as quadráticas, bem como as suas diferentes formas de representação, tais como as tabelas, os gráficos cartesianos e as expressões algébricas.

De acordo com o PMEB (2007), os objetivos específicos do ensino das funções ao nível do 3.º ciclo são:

> - Compreender o conceito de função como relação entre variáveis e como correspondência entre dois conjuntos, e utilizar as suas várias notações.
>
> - Identificar e assinalar pares ordenados no plano cartesiano.
>
> - Analisar uma função a partir das suas representações.
>
> - Interpretar a variação de uma função representada por um gráfico, indicando intervalos onde a função é crescente, decrescente ou constante.
>
> - Analisar situações de proporcionalidade direta e inversa e representá-las algebricamente
>
> - Representar gráfica e algebricamente uma função linear e uma função afim e relacioná-las:
>
> - Representar graficamente funções quadráticas;

- Relacionar as representações algébrica e gráfica das funções estudadas.

- Resolver e formular problemas, e modelar situações utilizando funções.

(p. 57)

De acordo com as orientações metodológicas do PMEB (2007) no âmbito das funções, devem ser propostas aos alunos tarefas de exploração que privilegiem a resolução de problemas contextualizados e a modelação de situações do quotidiano, de forma a contribuir para uma visão mais global da noção de função. Por outro lado, os alunos devem ser estimulados a realizar tarefas de investigação, nomeadamente, o estudo da influência de parâmetros dinâmicos das expressões algébricas, com recurso à utilização da tecnologia.

Também é de frisar a importância da análise e da interpretação dos vários tipos de representações de uma função, nomeadamente a conexão entre eles, identificando as potencialidades e as limitações de cada uma.

O estudo das funções é um tópico de importância central na Matemática por ser fulcral na conceção e no estudo de modelos que poderão auxiliar a previsão de várias situações, ideia que devemos transmitir aos nossos alunos.

2.3. O pensamento algébrico

O PMEB (2007) considera o pensamento algébrico como um dos quatro eixos fundamentais para o desenvolvimento do ensino-aprendizagem, fazendo também parte do propósito do ensino da Álgebra nos 2.º e 3.º ciclos. Segundo Kaput (2008), o pensamento algébrico é uma "capacidade humana" que privilegia "o fazer", "o pensar" e "o comunicar" sobre aspetos matemáticos e que se "manifesta quando, através de conjeturas e argumentos, se estabelecem generalizações sobre dados e relações matemáticas, expressas através de linguagens cada vez mais formais" (Ponte, Branco e Matos, 2009a, p. 9).

Na perspetiva de Kaput (1999), existem cinco formas de pensamento algébrico: (a) generalização e formalização de padrões e restrições; (b) manipulação de formalismos; (c) estudo de estruturas abstratas; (d) estudo de funções, relações e co-variação; e (e) linguagens de modelação e de 'controlo' de fenómenos. De acordo com o autor estas cinco formas estão relacionadas entre si e sobrepostas de acordo com a seguinte figura:

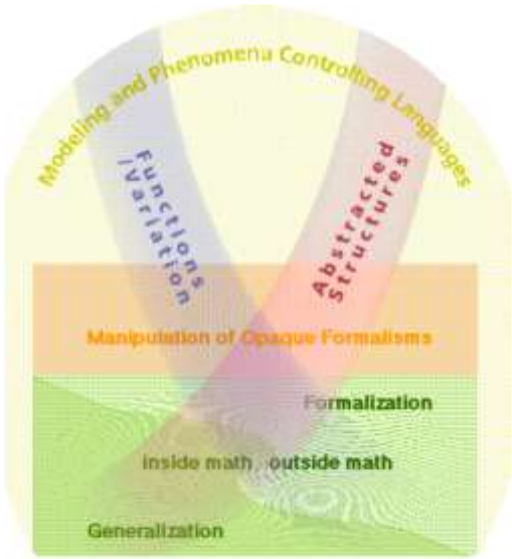


Figura 1 – Sobreposição e inter-relação entre as cinco formas de pensamento algébrico (Kaput, 1999, p. 5)

Assim, segundo o autor, a generalização e a formalização podem não coexistir, nomeadamente nos primeiros anos. De seguida, os alunos deverão ser confrontados com a manipulação de formalismos, ou seja, dos símbolos, sem perder a compreensão dos mesmos, o que está bem presente na célebre frase "olhar através dos símbolos". O estudo das funções está relacionado com a análise das relações entre variáveis, que pode ser trabalhada desde cedo através de exemplos bem presentes na experiência dos alunos. As estruturas abstratas, que se encontram geralmente associadas à Álgebra abstrata dos níveis universitários, estão baseadas no raciocínio indutivo. Por fim, os alunos deverão ser capazes de modelar partindo de situações contextualizadas que tentam matematizar, frisando assim a importância da Matemática na compreensão e construção do mundo que nos rodeia.

Na opinião de Kaput (2008) existem dois aspetos nucleares do pensamento algébrico: a simbolização sistemática de generalizações de regularidades e restrições, ou seja, o simbolismo, e o pensamento guiado sintaticamente em conjunto com ações em generalizações expressas através de sistemas simbólicos convencionais, isto é, a capacidade de generalização. O autor também refere que destas duas vertentes surgem três ramos: o estudo de estruturas e sistemas abstraídos do cálculo e de relações, que incluem generalizar a partir de operações aritméticas e suas propriedades (aritmética generalizada); o estudo de funções, relações e covariação, que se referem à análise e descrição da variação (pensamento funcional); e a aplicação de uma linguagem de modelação de situações dentro ou fora da Matemática, que está diretamente relacionada com o desenvolvimento da noção de símbolo.

Ponte, Branco e Matos (2009a) também mencionam que o pensamento algébrico se organiza em três vertentes: representar, relacionada com a capacidade de utilizar diferentes representações e destacando a representação simbólica; raciocinar, relacionando objetos, generalizando as relações entre eles e deduzindo; e resolver problemas e modelar situações utilizando representações adequadas para interpretar, analisar e solucionar problemas variados. De frisar que ambas as classificações dos autores apresentam caraterísticas muito idênticas.

Em relação aos principais elementos centrais do pensamento algébrico, Ponte (2006) destaca a descoberta e a prova de propriedades que se verificam em toda uma classe de objetos (generalização), a capacidade de manipular os símbolos e a capacidade de os interpretar e usar de forma criativa, designada por “sentido de símbolo”, segundo Arcavi (2006). Assim, o autor dá especial atenção às relações entre os objetos que devem assumir um caráter cada vez mais geral e abstrato.

Também Blanton e Kaput (2005), citados por Mestre e Oliveira (2012), caracterizam o pensamento algébrico como o “processo pelo qual os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de casos particulares, estabelecem essas generalizações através de discurso argumentativo, e expressam-nas de formas progressivamente mais formais e adequadas à sua idade” (p. 202), descrevendo assim todo o percurso percorrido pelos alunos desde a análise do particular até à construção do raciocínio mais geral.

De acordo com Kieran (2004), e tal como é defendido no programa de Matemática (ME, 2007), o pensamento algébrico deve ser estimulado desde os primeiros anos de escolaridade, através da identificação de regularidades numéricas que os alunos podem procurar por si próprios, ajudando a desenvolver a capacidade de abstração através da aritmética generalizada. Desta maneira, os alunos desenvolverão formas de pensar matematicamente que permitem a exploração de relações entre quantidades, a análise da estrutura e da mudança, a resolução de problemas, a generalização, a modelação, a previsão, a justificação e a prova de conjeturas, utilizando ou não a simbologia. A autora considera que estas noções de pensamento algébrico servem para contrapor a Álgebra escolar tradicional.

Segundo Radford (2006), o pensamento algébrico é uma maneira particular de pensar matematicamente. O pensamento algébrico é assim um processo onde os alunos, através da observação de regularidades e de relações matemáticas existentes em situações particulares, raciocinam de modo geral, chegando a generalizações que expressam usando os seus próprios recursos.

A generalização é considerada, por vários autores os vários autores referidos anteriormente, um elemento fulcral do pensamento algébrico.

2.4. A capacidade de generalização na aprendizagem da Álgebra

2.4.1. O conceito de generalização

A capacidade de generalização é um aspeto central da atividade matemática e assume um papel de destaque na Álgebra. Desta maneira, vários autores se têm debruçado sobre o assunto na tentativa de caraterizar esta noção.

Na opinião de Kaput (1999), a generalização é definida como uma extensão do raciocínio, ou da comunicação desse raciocínio, para além do caso ou dos casos considerados, identificando e expondo o que existe de comum. O autor também refere a generalização como um aspeto da Matemática que tem vindo a sofrer evolução, sendo que nas salas de aula tradicionais os alunos generalizam através de relações e objetos que já são concebidos matematicamente, tais como as tabelas da multiplicação, enquanto os outros alunos generalizam a partir de conceções retiradas de situações com significado, a partir das quais derivam as atividades de formalização próprias, promovendo desta maneira uma aprendizagem ativa, baseada na compreensão e na construção de significados.

Também Ponte, Branco e Matos (2009a), caraterizam esta capacidade, considerando que generalizar é “descobrir e comprovar propriedades que se verificam em toda uma classe de objetos” (p. 10), reforçando a ideia da importância de encontrar o geral no particular e confirmando que o particular pertence ao geral.

De acordo com a linha de pensamento de Radford (2006), a generalização algébrica nos padrões “assenta na identificação de características comuns que são locais e que são depois generalizáveis a todos os termos da sequência e que servem de garantia para construir expressões de elementos que permanecem para além do campo percetual”

(p. 5). Segundo o autor, para os alunos principiantes esta identificação do comum não ocorre de repente, devendo ser um processo que se constrói de forma gradual, através da exploração realizada pelos alunos, baseada nos seus recursos.

Segundo Stacey (1989), existem dois tipos de generalização no contexto de exploração de sequências, tendo em conta as estratégias utilizadas para generalizar situações: a generalização próxima e a generalização distante. A generalização diz-se próxima quando os termos são determinados recorrendo à contagem ou a desenhos e distante quando, em vez de uma abordagem passo a passo, são utilizadas estratégias que implicam a construção de uma regra geral.

Segundo Ellis (2011), a generalização é definida como "uma atividade onde as pessoas, num contexto socio matemático específico, se envolvem em pelo menos uma de três ações: a) identificando o que é comum entre casos; b) estendendo o seu raciocínio para além dos casos particulares; ou c) derivando resultados mais amplos através dos casos particulares" (p. 311). Assim sendo, a generalização é entendida como um processo dinâmico de identificação de semelhanças e de descoberta de extensões que os alunos percebem como gerais, realizada num contexto de sala de aula onde prevalecem os atos de colaboração entre alunos. A autora considera que o professor desempenha um papel importante na dinamização deste processo, nomeadamente encorajando a justificação e a clarificação dos resultados dos alunos, a partilha de ideias tornando públicas todas as contribuições, a previsão e a generalização de resultados.

Também Mestre e Oliveira (2012) defendem a generalização enquanto uma capacidade construída coletivamente, resultante do trabalho de debate com toda a turma, onde os alunos têm um papel ativo, quer na partilha e explicação das próprias ideias, quer na compreensão dos raciocínios dos outros. Desta forma, reconhecem também que o papel do professor tem extrema importância na dinamização de um ambiente de sala de aula de discussão coletiva e na condução do processo de generalização, "encorajando o questionamento e a clarificação, pedindo justificações, estimulando a análise e comparação de ideias, promovendo a discussão de erros e identificando as ideias matemáticas importantes de cada tarefa" (p. 134).

De acordo com a perspetiva de Ellis (2007b), as generalizações são mais significativas quando construídas a partir do próprio entendimento dos alunos das quantidades, nomeadamente baseadas em modelos reais onde são atribuídos significados às mesmas (raciocínio quantitativo). Esta perspetiva é confirmada pelo seu estudo onde o raciocínio emergente de quantidades se mostrou mais importante na influência da generalização do que o mero foco em números, uma vez que levou a diferentes tipos de generalização, principalmente a ações de procura de relações entre objetos e entre situações, em detrimento da procura de padrões e procedimentos.

A capacidade de generalização pode e deve ser desenvolvida desde muito cedo. Segundo o NCTM (2007), numa fase inicial em que os alunos fazem generalizações a partir de observações (números e operações), estes estarão a construir as bases do pensamento algébrico. Aqui os alunos generalizam a partir da linguagem natural ou da simbólica não formal, evoluindo progressivamente, de acordo com o nível de escolaridade, até à utilização da linguagem algébrica.

Como foi exposto, existem várias ideias que caraterizam a noção de generalização, sendo que a maioria assenta na generalização como um processo que se desenvolve a partir da análise de casos particulares e que, após identificação de caraterísticas comuns, evolui para uma regra geral. Numa fase inicial esta capacidade é expressa através de linguagem natural, evoluindo gradualmente para uma linguagem mais formal matematicamente, a linguagem algébrica. Desta maneira, a generalização é um aspeto fundamental do raciocínio matemático, quer como processo, quer como produto, tal como defende Ellis (2007a).

2.4.2. O processo de generalização segundo a taxonomia de Ellis

A capacidade de generalização tem sido um tema de investigação na Didática da Matemática, nomeadamente na identificação de diferentes tipos ou níveis de generalização. Ellis (2007a), baseando-se em dados empíricos recolhidos num contexto de aprendizagem em que se privilegiaram contextos reais e associados a quantidades, construiu uma taxonomia para classificar os diferentes tipos de generalização que os alunos realizam quando raciocinam matematicamente. A autora classificou os tipos de generalização em ações, que refletem a atividade mental e matemática dos alunos quando generalizam, e em reflexões, baseadas nas afirmações finais verbais ou expressões escritas pelos alunos como produto da generalização.

Com efeito, numa fase preliminar do processo de generalização, os alunos desenvolvem uma atividade mental que se caracteriza pela análise dos padrões apresentados, identificando propriedades, estabelecendo relações e definindo estratégias de exploração dos mesmos. São as chamadas *ações de generalização* que se encontram referidas detalhadamente na tabela que se segue e estão divididas em três categorias:

relacionar (situações e objetos), *procurar* (relações, procedimentos, padrões e resultados) e *estender* (estender o âmbito de aplicação, removendo casos particulares, operando ou continuando o padrão).

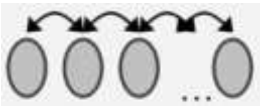
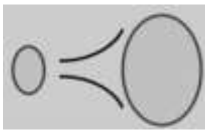
<table>
<tr><td rowspan="4">Relacionar
</td><td rowspan="2">Situações:
Estabelecer uma associação entre dois ou mais problemas ou situações</td><td>Recorrendo ao passado
Estabelecer uma conexão com uma situação anterior</td></tr>
<tr><td>Criando o novo
Criar novas situações semelhantes à atual</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Objetos:
Estabelecer uma associação de semelhança entre dois ou mais objetos</td><td>Recorrendo a propriedades:
Associar objetos recorrendo a uma propriedade semelhante</td></tr>
<tr><td>Recorrendo à forma
Associar objetos centrando o foco na semelhança da sua forma</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Procurar
</td><td colspan="2">A mesma relação:
Recorrer a ações repetidas pra estabelecer relações entre dois ou mais objetos</td></tr>
<tr><td colspan="2">O mesmo procedimento:
Recorrer a repetidos procedimentos para verificar a sua validade no geral</td></tr>
<tr><td colspan="2">O mesmo padrão:
Repetir ações de modo a verificar se os padrões permanecem sempre constantes</td></tr>
<tr><td colspan="2">A mesma solução ou o mesmo resultado:
Repetir ações de modo a determinar se o resultado se mantém idêntico</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Estender
</td><td colspan="2">Expandindo o âmbito de aplicação
Aplicação a um conjunto mais vasto de casos para além dos originais</td></tr>
<tr><td colspan="2">Removendo particularidades
Remover detalhes contextuais de forma a desenvolver casos globais</td></tr>
<tr><td colspan="2">Operando
Realizar operações a um objeto de forma a criar novos casos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Continuando
Repetir ações de acordo com um dado padrão de modo a gerar novos casos</td></tr>
</table>

Tabela 1- Categorização das ações de generalização (Ellis, 2007a, p. 235)

O culminar do processo de generalização ocorre quando os alunos verbalizam e escrevem as suas conjeturas de uma forma geral após a análise de casos particulares, que, segundo Ellis (2007a), são designadas por *generalizações refletidas*. Estas encontram-se apresentadas detalhadamente na tabela que se segue e são referentes a três grupos: *declarações de generalização* (continuação de fenómenos, identificação de semelhanças e princípios gerais), *definição de classes de objetos* e *influência/modificação de ideias e estratégias* definidas anteriormente.

<table>
<tr><td rowspan="8">Declarações de generalização</td><td colspan="2">Continuação de um fenómeno:
Identificar uma propriedade dinâmica que se estende para além de uma situação específica</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Semelhança:
Afirmações referentes a analogias e similaridades</td><td>Propriedades comuns:
Identificação de propriedades comuns em objetos e situações</td></tr>
<tr><td>Objetos ou representações
Identificação de objetos como similares ou idênticos</td></tr>
<tr><td>Situações:
Identificação de situações como similares ou idênticas</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Princípios gerais:
Afirmações referentes a situações gerais</td><td>Regra:
Descrição de uma fórmula geral ou um facto</td></tr>
<tr><td>Padrão:
Identificação de um padrão geral</td></tr>
<tr><td>Estratégias ou procedimento:
Descrição de um método que se estende para além de um caso específico</td></tr>
<tr><td>Regra global:
Afirmação do sentido de um objeto ou de uma ideia</td></tr>
<tr><td>Definição</td><td colspan="2">Classe de objetos:
A definição de uma classe de objetos que satisfazem uma dada relação, padrão ou acontecimento.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Influência</td><td colspan="2">Ideia ou estratégia prévia:
A implementação de uma generalização pré-desenvolvida</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ideia ou estratégia modificada:
A adaptação de uma generalização existente de forma a aplicar a um novo problema ou situação</td></tr>
</table>

Tabela 2- Categorização das generalizações refletidas (Ellis, 2007a, p. 245)

Segundo a autora, muitas das generalizações refletidas estão relacionadas com as ações de generalização, uma vez que, por exemplo, as declarações de semelhança podem acompanhar as ações de relacionar situações ou objetos e os princípios gerais são acompanhados de ações de procura de relações, padrões e resultados durante a exploração dos problemas.

Ellis (2007b) realizou posteriormente um estudo com dois grupos de alunos do 8.º ano, onde foi utilizada a categorização referida anteriormente. Neste estudo, a autora concluiu que no grupo onde o ensino foi baseado apenas em padrões numéricos os raciocínios do alunos que deram suporte à generalização basearam-se na procura de padrões, de procedimentos e de regras gerais, enquanto que no outro grupo, focado em raciocínios quantitativos, surgiram raciocínios direcionados para a procura de relações, a conexão entre situações e a identificação de propriedades dinâmicas. Desta forma, a autora concluiu que, quando a generalização está associada a raciocínios quantitativos, os alunos apresentam uma atividade matemática mais produtiva e sofisticada, promovendo o desenvolvimento de extensões corretas e de conclusões globais corretas e produzindo justificações apropriadas.

Através da análise de uma tabela de contagem do tipo de generalizações que os alunos realizaram (Ellis 2007b, p. 455), pode concluir-se que, globalmente, os raciocínios mais utilizados foram a relação com situações anteriores, a procura de relações, a extensão a novos casos e a procura de propriedades comuns e de regras gerais.

Por fim, Ellis (2007a) refere que a sua categorização para a generalização permite ao investigador avançar para além do modelo *standard* de identificação de padrões, de formalização e de desenvolvimento de regras como o único caminho para a generalização matemática. Sendo este um modelo relativamente recente e realizado com um número limitado de alunos, não deve ser considerado definitivo, mas sim uma classificação preliminar para caraterizar a tipologia das generalizações realizadas pelos alunos. Como tal, segundo a autora será necessário testar e validar este modelo em investigações futuras.

2.4.3. As estratégias de generalização utilizadas pelos alunos

Existe uma grande diversidade de estratégias muito próprias dos alunos para alcançar generalizações, sobre as quais vários autores se têm debruçado.

Stacey (1989) classifica, em quatro tipos, as estratégias de generalização utilizadas pelos alunos: o método da contagem, discriminando todos os termos até à ordem desejada; o método da diferença, recorrendo aos múltiplos da diferença entre termos consecutivos, o que nem sempre facilita o encontro de um regra geral correta; o método do objeto inteiro, aplicado quando existe proporcionalidade direta e que utiliza um múltiplo de determinados termos para determinar termos de outras ordens; e o método linear baseado na procura de uma relação do tipo an+b.

Baseados nas ideias do autor referido anteriormente, Ponte, Branco e Matos (2009a) apresentam algumas das estratégias dos alunos que surgem com maior frequência, nomeadamente:

(a) Estratégia de representação e contagem – Aqui o aluno representa todos os termos da sequência até ao termo solicitado, contando de seguida os elementos que o constituem. Esta estratégia não reflete de modo claro uma generalização de caráter global, pelo que, de forma a compreender a análise que o aluno faz, se torna importante questioná-lo acerca do seu processo de representação.

(b) Estratégia aditiva – Nesta situação o aluno compara termos consecutivos e identifica as alterações que ocorrem de uns para os outros. Esta estratégia, baseada numa abordagem recursiva, por vezes constitui um obstáculo à determinação entre cada termo e a sua ordem.

(c) Estratégia do objeto inteiro – Neste caso, o aluno utiliza um termo de uma ordem e com base nele determina um outro de uma ordem múltipla daquele de onde partiu. Esta estratégia pode conduzir a generalizações erradas, no caso de não haver proporcionalidade direta.

(d) Estratégia da decomposição dos termos – Nesta estratégia o aluno relaciona o termo com a sua ordem e representa essa relação através de uma expressão algébrica. Aqui, através da identificação do processo de construção da sequência, é possível determinar facilmente termos de ordem distante.

Radford (2006) distingue três estratégias utilizadas pelos alunos durante o processo de generalização: a indutiva, a aritmética e a algébrica. A estratégia indutiva, não relacionada com o processo de generalização, é baseada na tentativa e erro ou noutras estratégias de adivinhação, sem a identificação de regularidades. Em relação à estratégia aritmética, esta permite a construção de termos de sequências recorrendo a um aspeto local comum, sem recorrer a uma regra. A estratégia algébrica divide-se em três níveis de generalização: o factual, que se refere ao nível do concreto, baseado em ações realizadas nos números e em casos particulares e sem atribuir um valor à ordem quando se determina termos de ordens mais distantes; o contextual, quando já é utilizada a referência ao número da figura e a descrição da generalização é realizada com recurso ao contexto, o que ocorre com frequência no caso das sequências visuais; e o simbólico, quando a generalização é expressa a partir de linguagem algébrica.

De acordo com o que o autor verificou no seu estudo referente a alunos do 1.º ciclo, nos dois primeiros níveis da estratégia algébrica, os alunos referem-se com frequência à figura e não ao número da figura. O autor refere a importância da dinâmica das aulas, que se deve basear na exploração de padrões identificando relações e formulando generalizações, que posteriormente devem ser expressas algebricamente. Por fim, Radford (2006) reforça a importância da partilha de resultados e da discussão entre os grupos, não só pela troca de ideias, mas de forma a possibilitar a reflexão sobre outras estratégias que contrastem com as nossas.

Hargreaves et al. (1999), citados por Santos (2008), destacam três estratégias utilizadas com frequência pelos alunos: através das diferenças, envolvendo o cálculo de diferenças entre dois termos; através da natureza dos números, que resume-se em identificar uma propriedade presente nos termos de uma sequência; e através de tabelas de multiplicação, que representam uma relação multiplicativa dos dados.

No estudo realizado por Santos (2008) com o intuito de compreender o desenvolvimento de processos de generalização em padrões com alunos do 5.º ano, a autora concluiu que inicialmente os alunos utilizavam estratégias recursivas, através de métodos de contagem ou aditivos, subjacentes à estrutura dos padrões. De forma gradual, assistiu-se a um desenvolvimento na escolha das estratégias, que permitiu aos alunos abandonarem determinadas relações, baseadas no reconhecimento de propriedades das figuras ou dos números, em detrimento de outras, tais como a procura de relações entre as variáveis, que mais facilmente os encaminhariam na procura de generalizações do ponto de vista algébrico, demonstrando desta maneira uma maior flexibilidade ao nível do pensamento algébrico. Desta forma, segundo as ideias da autora, os alunos desenvolveram estratégias próprias, revestidas de uma intencionalidade em chegar a uma generalização formal definida algebricamente, resultante da identificação de propriedades que os alunos tinham consciência que os conduzira diretamente à formalização. Por exemplo, em relação às generalizações lineares, os alunos foram usando e adaptando esquemas de generalização de tarefa para tarefa, evidenciando que "adquiriram o conhecimento conceptual que lhes permite reconhecer caraterísticas comuns entre padrões e reajustar as generalizações anteriores em função das caraterísticas do novo padrão" (p. 152).

Segundo o estudo de Cunha (2010), realizado em duas turmas do 5.º ano com o objetivo de compreender os processos de resolução de tarefas com sequências, recorrendo ou não à tecnologia, as estratégias iniciais de exploração de sequências com padrões, especialmente em situações de determinação de termos próximos, também se centraram no processo de contagem e em estratégias recursivas baseadas na adição consecutiva do mesmo número de unidades. Quanto à determinação de termos distantes, alguns alunos tentaram encontrar outras relações entre as figuras e as suas posições, baseado num processo multiplicativo.

Apesar de as estratégias utilizadas pelas duas turmas serem semelhantes, existiram algumas diferenças no trabalho desenvolvido por ambas. Com efeito, os alunos que trabalharam sem recurso às tecnologias realizaram uma análise mais eficiente das figuras das sequências, procurando relações funcionais através da análise da composição de cada figura ou por reconhecimento da sequência numérica subjacente, recorrendo desta maneira com menor frequência à utilização de estratégias aditivas. Na turma em que os alunos usaram a tecnologia, verificou-se que estes conseguiram utilizar uma linguagem mais formal na designação da expressão geral das sequências.

Baseando-se em conclusões de outros investigadores, Barbosa (2011) construiu a seguinte categorização para as estratégias de generalização:

Estratégia		**Descrição**
Contagem		Desenhar uma figura e contar os seus elementos.
Termo unidade	Sem ajuste	Considerar um termo da sequência como unidade e usar múltiplos dessa unidade.
	Com ajuste numérico	Considerar um termo da sequência como unidade e usar múltiplos dessa unidade. É feito um ajuste do resultado tendo por base propriedades numéricas.
	Com ajuste contextual	Considerar um termo da sequência como unidade e usar múltiplos dessa unidade. É feito um ajuste do resultado tendo por base o contexto do problema.
Diferença	Recursiva	Continuar a sequência com base na diferença entre termos consecutivos.
	Múltiplo da diferença sem ajuste	Usar a diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo, sem ajustar o resultado.
	Múltiplo da diferença com ajuste	Usar a diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo. É feito um ajuste do resultado.
Explícita		Descobrir uma regra, com base o contexto do problema, que permite o cálculo imediato do valor da variável dependente sendo conhecida a variável independente correspondente.
Tentativa e erro		Adivinhar uma regra fazendo sucessivas tentativas com diferentes valores. Conhecida uma regra, experimentar sucessivos valores até que sejam verificadas as condições pretendidas.

Tabela 3 - Categorização das estratégias de generalização (Barbosa, 2011, p.330)

Dos resultados obtidos a partir do seu estudo com alunos do 6.º ano, Barbosa (2011) verificou que as estratégias utilizadas com maior frequência foram a contagem, na resolução de questões de generalização próxima e a explícita, principalmente nas generalizações distantes, verificando-se assim uma mudança de estratégias consoante o tipo de generalização solicitada.

Pereira e Fernandes (2012), num estudo realizado com alunos do 7.º ano, também chegaram a conclusões semelhantes às da autora referida anteriormente. Assim sendo, nas questões de generalização próxima os alunos privilegiaram estratégias de contagem e diferença, enquanto na generalização distante recorreram à estratégia explícita e muito raramente a processos de tentativa e erro.

As estratégias adotadas pelos alunos são variadas, dependendo das situações que lhes são propostas, visuais ou numéricas, do que lhes é solicitado relativamente à proximidade dos termos, da reprodução de estratégias aprendidas na sala de aula e das suas capacidades num quadro de desenvolvimento de pensamento algébrico.

2.4.4. As dificuldades apresentadas pelos alunos no processo de generalização

As dificuldades que os alunos apresentam durante o processo de generalização têm sido alvo de interesse na investigação. Percebê-las é fundamental para que o professor possa desenvolver estratégias que promovam o desenvolvimento desta capacidade.

A aplicação indevida da proporcionalidade direta tem sido uma das maiores dificuldades apresentadas pelos alunos neste processo, quer nas sequências, quer nas funções. Segundo Barbosa (2011), esta dificuldade deve-se a duas situações: a utilização de uma abordagem estritamente numérica que sem a atribuição de significado às variáveis é um entrave à generalização; e a generalização de múltiplos de termos conhecidos da sequência, sem a presença de proporcionalidade direta. Segundo a autora, o raciocínio recursivo também apresenta algumas limitações, uma vez que, com frequência conduz a generalizações incorretas em virtude de não promover a descoberta de relações funcionais.

Segundo Kaput (1999), quando os alunos não constroem o seu próprio conhecimento, ou quando não lhes é dado tempo para refletir sobre as aprendizagens, vários erros e dificuldades emergem. No âmbito da aprendizagem da Álgebra, as principais dificuldades apresentadas prendem-se com o facto de os símbolos acabarem por perder a sua ligação ao concreto, o que posteriormente se reflete em erros frequentes na manipulação algébrica dos mesmos. Desta forma, o autor refere a incapacidade de olhar com significado para os objetos matemáticos, o "olhar através dos símbolos", como uma dificuldade presente e que frequentemente se reflete quando os alunos não conseguem entender a sintaxe da Álgebra, nem interpretar o significado dos símbolos algébrico.

De acordo com as ideias de Ponte, Branco e Matos (2009a), as principais dificuldades evidenciadas pelos alunos no estudo das sequências surgem na determinação de termos de ordem distante, nas relações não lineares e quadráticas e na generalização da relação entre cada termo da sequência e a sua ordem. O raciocínio recursivo é apontado, por estes autores, como uma abordagem com limitações, nomeadamente nas questões de generalização distante, uma vez que os alunos tendem a analisar a variação numa das variáveis em detrimento de procurarem uma relação funcional entre as duas variáveis, o que limita as suas possibilidades de generalização.

Ponte (2006) aponta várias dificuldades ao nível da Álgebra, nomeadamente a atribuição de sentido a uma expressão algébrica e de significado a uma variável e o lidar com a terminologia algébrica, como x, y e f(x), que constituem obstáculos e condicionam a aprendizagem da Álgebra ao longo dos vários ciclos de escolaridade. É também apontada como dificuldade a transição entre a linguagem natural e a linguagem algébrica, que pode comprometer, mais tarde, a interpretação do significado das letras.

Segundo o estudo de Santos (2008), são realçadas as dificuldades, tais como, exprimir raciocínios oralmente e através da escrita e em justificá-los. Por outro lado, também é apresentada como dificuldade o facto de os alunos não sentirem necessidade em testar as suas conjeturas, recorrendo a casos particulares, raciocínio tão importante na validação da generalização. Com menor frequência e importância, a autora também refere que no seu estudo surgiram alguns erros ao nível do cálculo, que por vezes dificultam a chegada a conclusões corretas, mas que os próprios alunos conseguem detetar.

Warren (2005), citada por Santos (2008), também defende esta ideia afirmando que, apesar da maioria dos alunos conseguir identificar a generalização verbalmente, a generalização através de uma linguagem algébrica nem sempre é acessível aos alunos. Para além destes problemas de linguagem, por vezes os alunos também encontram padrões que não é possível representar algebricamente, sendo nestes casos importante a intervenção do professor de forma a encaminhar o raciocínio dos alunos. Com a prática, espera-se que os alunos estejam sensibilizados para esta situação, conseguindo abandonar algumas caraterísticas presentes nas várias situações, em detrimento de outras que se concentrem em relações entre as variáveis de forma a permitir encontrar a expressão algébrica.

De acordo com os resultados do estudo de Cunha (2010), os alunos apresentaram dificuldades em utilizar uma linguagem formal para explicitar simbolicamente a regra geral de formação da sequência, apesar de conseguirem recorrer a raciocínios que evidenciam a presença da capacidade de generalização para determinar corretamente termos distantes. Os alunos deste estudo também revelaram falta de hábitos de comunicação matemática, o que se tornou uma dificuldade quando houve necessidade de expressarem os seus raciocínios justificadamente, oralmente ou por escrito. A escolha de estratégias de resolução inadequadas, tais como as aditivas, também foi um obstáculo para estes alunos, em virtude de serem processos morosos que por vezes contribuem para a existência de erros de cálculo.

Também Pereira e Fernandes (2012) referem que, no seu estudo com alunos do 7.º ano, detetaram obstáculos no processo de generalização, tais como: a transição entre a linguagem natural e a linguagem algébrica, facto que se deve à dificuldade que os alunos apresentam quando tentam dar sentido a uma expressão algébrica ou a uma letra nessa expressão; a relação entre diferentes representações e a construção simbólica de relações gerais. De acordo com os resultados obtidos pelos autores, de um modo geral os alunos manifestaram dificuldades em transitar do concreto para o abstrato, facto que é justificado pelos autores pela influência da faixa etária onde os alunos se encontravam.

Segundo Barbosa (2011), o raciocínio focado em valores numéricos também revela normalmente limitações no processo de generalização dos alunos. De forma a atenuar esta dificuldade, são sugeridas abordagens de natureza visual que são consideradas como facilitadoras do raciocínio por contribuírem para a atribuição de significados às variáveis. A manipulação de figuras, para além de ser facilitadora do raciocínio algébrico, facilitando o processo de generalização e proporcionando múltiplas abordagens que contribuem para a descoberta de expressões equivalentes, contribui para o desenvolvimento da visualização, componente tão importante do raciocínio geométrico. Um dos objetivos da utilização dos contextos visuais é, efetivamente, promover nos alunos um raciocínio mais flexível que permita o estabelecimento natural da relação entre os contextos visuais e os numéricos. Esta autora também refere que, no seu estudo, os raciocínios inversos foram identificados como outra das dificuldades apresentadas pelos alunos, facto que, por vezes, pode estar relacionado com erros aritméticos.

Segundo Lanin (2005), citado em Mestre e Oliveira (2011), os alunos apresentam muitas dificuldades em validar os seus argumentos. Por outro lado, a concentração nos exemplos particulares, ao invés de estabelecerem uma regra geral, também é uma dificuldade encontrada pelo autor. Para ultrapassar esta situação, devemos incentivar os alunos a justificarem raciocínios e a testar as regras que encontram.

A presença de várias dificuldades na transição do particular para o geral é consensual para vários investigadores e professores e é com base nesta preocupação que vários estudos têm sido realizados tendo como objetivos principais identificar a origem dessas dificuldades e colmatá-las. Assim sendo, as orientações metodológicas referentes ao ensino da Álgebra no programa (ME, 2007) defendem que, de forma a promover com sucesso o processo de generalização dos alunos, estes devem ser sujeitos a um ensino que dê primazia à aprendizagem com significado, iniciando o estudo dos padrões pictóricos e numéricos desde cedo, através de experiências informais baseadas nos conhecimentos dos alunos. Pretende-se também reforçar a utilização da linguagem natural que progressivamente vai evoluindo para a linguagem algébrica, explorar vários tipos de representações e incentivar a utilização de terminologia matemática em várias situações, matemáticas ou extra matemáticas familiares aos alunos. Também, para além das estratégias que o professor tem de adotar para contribuir para o sucesso em Matemática, a dinâmica de sala de aula tem de ser baseada na discussão e partilha das abordagens seguidas pelos alunos de forma a estimular o seu espírito crítico.

3. A unidade de ensino

Neste capítulo pretende-se apresentar e descrever a proposta pedagógica que serviu de base a este estudo, com vista a desenvolver e, posteriormente, analisar aspetos que evidenciam a capacidade de generalização nos alunos do 8.º ano de escolaridade. Com efeito, será apresentada a unidade de ensino, nomeadamente as suas orientações curriculares, o contexto escolar onde foi aplicada, a respetiva planificação, as estratégias de ensino seguidas e a descrição pormenorizada dos objetivos de cada tarefa. Por fim, será realizada uma breve descrição de cada uma das aulas da unidade de ensino referentes aos tópicos das sequências e funções.

3.1. Apresentação da unidade de ensino

Em virtude do tópico “Termo geral de uma sequência numérica” do tema das “Sequências e regularidades” não ter sido lecionado no 7.º ano de escolaridade, e estando ciente de que o trabalho com as sequências é uma base para o desenvolvimento da capacidade de generalização e para o estudo das funções, decidi introduzir este tópico antes do tema das “Funções”. Por outro lado, a exploração das sequências também permitiria aos alunos aplicar de uma forma contextualizada e encadeada os conhecimentos prévios sobre expressões algébricas e equações e daria suporte ao trabalho a desenvolver no tópico das “Operações com polinómios” a lecionar posteriormente.

Assim sendo, lecionando estes temas tornar-se-ia possível o cumprimento do propósito principal deste trabalho, sem comprometer a planificação anual realizada no início do ano letivo pelo grupo de professores que lecionam este ano de escolaridade. No entanto, por uma questão de oportunidade temporal, e com a concordância da coordenadora de grupo e conhecimento dos restantes professores do grupo, fiz algumas alterações na planificação anual realizada previamente, antecipando os temas “Organização e tratamento de dados”, não lecionado no 7.º ano, e “Planeamento de dados” do 8.º ano. Deste modo, pude compatibilizar a escolha do tema que pretendia trabalhar neste relatório com o horizonte temporal em que o poderia concretizar.

3.1.1. Orientações curriculares

Segundo o programa de Matemática (ME, 2007), o ensino do tema da Álgebra no 3.º ciclo deve visar o desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébricos dos alunos, capacitando-os a interpretar, a representar e a resolver problemas algebricamente, para que posteriormente sejam capazes de explorar e modelar variadas situações. Assim, segundo os objetivos gerais de aprendizagem referidos no programa (ME, 2007), com o ensino da Álgebra os alunos devem: "(i) ser capazes de interpretar e representar situações em contextos diversos, usando linguagem e procedimentos algébricos; (ii) compreender o conceito de função e sejam capazes de o usar em diversas situações, em particular de proporcionalidade direta e inversa; (iii) ser capazes de interpretar fórmulas em contextos matemáticos e não matemáticos; (iv) ser capazes de resolver problemas, comunicar, raciocinar e modelar situações recorrendo a procedimentos algébricos" (p. 55).

O ensino das sequências e funções, de acordo com o programa (ME, 2007), deve dar continuidade ao estudo desenvolvido no 2.º ciclo, onde os alunos trabalharam com situações de proporcionalidade direta e estudaram padrões geométricos e regularidades em sequências numéricas. No 3.º ciclo, a partir do estudo das sequências iniciado anteriormente, inicia-se a formalização deste tema, recorrendo à representação simbólica do termo geral, e aprofunda-se o estudo das funções.

Esta proposta pedagógica, seguindo de perto o programa de Matemática (ME, 2007), tem como objetivos específicos: (i) compreender a noção de termo geral de uma sequência e representá-lo usando símbolos matemáticos adequados; (ii) determinar um termo geral de uma sequência numérica, e termos de várias ordens, a partir do termo geral; (iii) analisar uma função a partir das suas representações; (iv) representar gráfica e algebricamente uma função linear e uma função afim; e (v) relacionar funções lineares e afim.

Para além dos objetivos previstos, o programa (ME, 2007) também contempla três capacidades transversais a todos os ciclos, que devem ser desenvolvidas no trabalho a realizar em qualquer tópico do programa: a resolução de problemas em contextos matemáticos ou não; o raciocínio matemático; e a comunicação matemática oral e escrita. Assim sendo, todo o planeamento da aula de Matemática deve dar oportunidade para os alunos desenvolverem estas capacidades transversais.

3.1.2. Contexto escolar

O presente estudo foi realizado com alunos de uma turma do 8.º ano de escolaridade do Ensino Básico da qual no presente ano letivo sou professora de Matemática.

De seguida, apresento uma breve descrição da escola, da turma, dos alunos-caso e das razões da sua escolha.

Caraterização da escola

A escola onde decorreu este estudo situa-se na zona da Grande Lisboa, num dos concelhos com maior rendimento *per capita* a nível nacional, com maior concentração de licenciados e de doutorados e com a mais baixa taxa de munícipes sem escolaridade básica do país, cerca de 5%. Assim, este concelho é caracterizado por uma estratificação socioeconómica muito particular, com forte presença das classes sociais altas e média, contrastando com alguns estratos sociais médio-baixos e baixos. Seguindo os dados do relatório *Excel* (2008), trata-se de uma comunidade com elevado potencial de desenvolvimento educativo e uma superior margem de progressão nos resultados escolares.

Esta escola é secundária, com 3.º ciclo, frequentada por cerca de 1300 alunos, distribuídos essencialmente pelo ensino regular, igualmente divididos pelos ensinos secundário e básico. De acordo com relatório de avaliação externa das escolas (2009), as taxas de conclusão, quer no ensino básico, quer no secundário, são superiores aos valores nacionais, sendo de destacar que os resultados obtidos nos exames nacionais do 9.º ano situam-se com frequência acima da média nacional, evidenciando-se a disciplina de Matemática. Os níveis de abandono escolar são pouco significativos, cerca de 1,1 %. Tendo em conta as características da população escolar, a maioria dos alunos revela grandes expectativas a nível do futuro académico e profissional.

Caracterização da turma

Os alunos participantes no estudo encontram-se numa turma do 8.º ano com 26 alunos, constituída por 12 rapazes e 14 raparigas. À data os alunos tinham idades compreendidas entre os 13 e 14 anos, com uma média de 13,2. Dois dos alunos já tinham sido retidos no 3º ciclo e um outro aluno tem necessidades educativas especiais.

As habilitações dos Encarregados de Educação variam entre o 2º ciclo de escolaridade e o ensino superior, no entanto, a maioria possui habilitações ao nível do ensino superior.

Habilitações	**Número de pais**
2.º Ciclo	3
3.º Ciclo	2
Ensino Secundário	11
Bacharelato	8
Licenciatura	28
Total	52

Tabela 4 – Habilitações dos pais dos alunos

O conselho de turma, ao longo do presente ano letivo, tem considerado os alunos bem comportados no geral, pelo facto de ser pouco frequente a ocorrência de participações disciplinares e por existir um ambiente de trabalho e de relação entre docentes e alunos bastante saudável. Em relação ao aproveitamento, este também é considerado bom, em virtude da maioria dos alunos não apresentar níveis inferiores a três e apenas dois dos alunos, no 2.º período, se encontrarem em situação de possível não transição.

Em relação à disciplina de Matemática o aproveitamento é satisfatório, dado que a maioria dos alunos tem nível 3 e, apenas aproximadamente 23% dos alunos, apresenta níveis inferiores a 3, tal como ilustra o gráfico que se segue:

Figura 2 – Evolução das classificações dos alunos ao longo dos dois períodos do 8.º ano

Em relação ao ano letivo anterior, as classificações dos alunos têm-se mantido no geral, permanecendo muito idênticas as percentagens de cada uma das classificações atribuídas.

Os resultados das tarefas de avaliação diagnóstica indicam que os alunos estão bem preparados a nível de conhecimentos prévios.

Tópico / **Nível**	**Sequências**	**Funções**
Não Satisfatório	0	0
Satisfatório	2	4
Bom	8	20
Muito Bom	16	2
Totais	26	26

Tabela 5 – Desempenho dos alunos nas tarefas diagnósticas

No que diz respeito ao comportamento dos alunos na aula de Matemática, este é bom, refletindo-se na sua predisposição para trabalhar, participando com interesse e empenho nas tarefas propostas e, de um modo geral, tentando ultrapassar as dificuldades que apresentam na disciplina.

A disciplina indicada como favorita pela maioria dos alunos é Ciências Naturais e a que menos gostam é História. Existem cinco alunos que indicam a Matemática como uma das suas disciplinas favoritas mas, em contrapartida, existem sete alunos que indicam a Matemática como a disciplina menos apreciada, por apresentarem maiores dificuldades ou simplesmente por não gostarem.

3.1.2. Planificação da unidade de ensino

Uma unidade de ensino deve basear-se em perspetivas claras sobre o modo como os alunos aprendem, tendo em conta que a atividade dos alunos é em grande medida influenciada pelo encaminhamento do professor. Assim sendo, uma unidade de ensino pode ter por base a construção de uma trajetória de aprendizagem dos alunos, em relação à qual é necessário identificar: um objetivo que se pretende desenvolver num determinado tópico matemático, estabelecendo as ideias e ações mentais que devem ir sendo construídas; um percurso de aprendizagem que permita aos alunos desenvolver a compreensão e progredir num determinado tópico matemático, gerando as ideias e ações mentais a construir; e o ensino desse tópico, ou seja, estratégias e tarefas específicas orientadas de forma a auxiliar os alunos a percorrerem uma trajetória estipulada (Serrazina e Oliveira, 2010). É certo que estas trajetórias de aprendizagem são hipotéticas, tal como as autoras referem, no entanto, a previsão que um professor faz em relação aos processos de construção dos conceitos e compreensão dos mesmos por parte dos seus alunos vai ao encontro de caraterísticas da aprendizagem individual, antecipando a evolução do pensamento dos alunos.

Reconhecendo a complexidade de que se reveste a construção de trajetórias hipotéticas de aprendizagem, mas estando convicta de que é importante criar percursos de aprendizagem coerentes, construí uma sequência de tarefas articuladas entre si que considero serem potenciadoras das aprendizagens dos conceitos desta unidade e na qual se reflete a minha convicção sobre o papel importante do papel do professor na aprendizagem dos alunos.

Seguindo as indicações metodológicas referidas no programa (ME, 2007), privilegiei tarefas envolvendo atividades de simbolização e modelação, que partissem de experiências informais e progredissem para processos de manipulação algébrica formal. Também é importante referir que, sempre que considerei oportuno, propus aos alunos tarefas de consolidação dos procedimentos algébricos de rotina.

Em relação aos recursos utilizados, recorri ao computador e ao programa *Geogebra*, seguindo uma das indicações do programa (ME, 2007), porque, por um lado, deve ser dada oportunidade aos alunos de se familiarizarem com a tecnologia para uso educativo e, por outro, permite a análise rápida de informação em diversas formas, numérica, algébrica e gráfica, quando nem os cálculos, nem os procedimentos algébricos rotineiros são objeto específico da aprendizagem.

Assim sendo, o trabalho desenvolvido previamente à concretização das aulas, envolveu o estudo de orientações curriculares e de investigações sobre a aprendizagem da Álgebra nestes níveis de escolaridade de modo a definir um percurso coerente para os alunos, através da definição de uma sequência de tarefas matemáticas. Estas incluem tarefas que foram criadas ou adaptadas e outras que se encontram no manual do aluno. Deste trabalho resultou a planificação sintetizada a seguir (para uma planificação mais detalhada ver anexo 3).

Tópicos	Tarefas	Tempos (45 ‘)	Modo de trabalho
	Tarefas de diagnóstico	0,5	Individual
Sequências e regularidades • Termo geral de uma sequência numérica • Representação • Expressões algébricas	**Ficha “Sequências”** Tarefa 1 (sequências pictóricas no plano)	2	A pares
	Ficha “Sequências” Tarefa 2 e 3 (sequências pictóricas no espaço e sequências numéricas I)	2	A pares
	Correção do tpc tarefas 4 (do termo geral à sequência) e 5 (sequências numéricas II)	1	Individual
Funções Funções linear e afim	**Ficha “Funções”** Correção do tpc tarefa 1 **(**Passeio a pé**)** e resolução da tarefa 2 (O tarifário da água), com o auxílio do Geogebra	2	A pares
	Manual Tarefa da p.98 (Investigando as funções afim) alíneas 1,2,e 4, com o auxílio do Geogebra	2	A pares
	Manual Resolução de exercícios de aplicação Ex.2, 4 e 7 da p.109	1	Individual
	Manual Resolução de exercícios de aplicação Ex.3 p. 98; 2 e 4 p.112	1	Individual
	Ficha “Funções” Correção do tpc tarefa 3 (Vendedor de automóveis) Tarefa 4 (A corrida)	2	A pares
	Ficha “Funções” Tarefa 5 (Área do polígono)	1	Individual
	Minificha de avaliação	1	Individual
	Minifichas de avaliação Entrega e correção	1	Em grande grupo
	Ficha de revisões Esclarecimento de dúvidas	1	Em grande grupo
	Ficha de avaliação	2	Individual

Tabela 6 - Planificação sintetizada da proposta pedagógica

A concretização desta unidade de ensino decorreu entre 23 de janeiro e 22 de fevereiro de 2013, tendo existido posteriormente um momento de avaliação global, perfazendo um total de 19 tempos de 45 minutos. Esta planificação sofreu alguns ajustes ao nível da organização dos tempos previstos na planificação inicial devido à realização de atividades extracurriculares não contempladas à priori e que interferiram com as aulas de Matemática.

Apesar da proposta de planificação da previsão dos blocos a lecionar no tema das “Sequências e regularidades” do 7.º ano, realizada pelos professores das turmas piloto, referir 10 aulas de 45 minutos, apenas utilizei cinco em virtude de estas não estarem contempladas na planificação anual e também pelo facto de os alunos já terem trabalhado anteriormente o subtópico da simplificação de expressões algébricas. Em relação ao tema das “Funções”, cuja previsão dos blocos a lecionar contempla 7 tempos de 45 minutos, utilizei 8,5 tempos em virtude de considerar este tema de extrema importância e a partir da minha experiência verificar que os alunos apresentam algumas dificuldades, que podem comprometer o seu percurso escolar na disciplina.

Com o intuito de me inteirar dos conhecimentos prévios dos alunos, antes de iniciar a unidade de ensino foram propostas duas tarefas de diagnóstico, uma referente ao tema das sequências e outra ao das funções.

De forma a avaliar os conhecimentos dos alunos foram realizados dois momentos de avaliação individual: uma minificha de avaliação no fim da unidade de ensino referida, com a duração de 45 minutos, e uma ficha de avaliação global quinze dias depois, com a duração de 90 minutos.

De referir que esta unidade didática foi delineada à semelhança de todo o trabalho desenvolvido até à data, em que as tarefas e a dinâmica das aulas têm características idênticas desde o início do ano letivo.

3. 1.3. Estratégias

Ao longo da planificação da unidade de ensino, segui uma estratégia de ensino de caráter exploratório, dando ênfase a tarefas de investigação e exploração e privilegiando a discussão na aula entre os alunos e entre a professora e alunos.

A maioria das tarefas apresentadas foi concebida para ser dinamizada na sala de aula em três momentos: trabalho de exploração das mesmas pelos alunos, realizado a pares; momento de reflexão e discussão com toda a turma, onde os alunos interagiram entre eles, partilharam e justificaram as suas conclusões e a professora geriu as intervenções assumindo um papel de orientador; e momento de síntese dos resultados, formalização e sistematização de conhecimentos conduzido pela professora. De referir que nem sempre todos os alunos tinham terminado a exploração das tarefas a pares quando iniciámos a discussão e que tive sempre o cuidado de concluir o trabalho desenvolvido para cada tarefa na própria aula para que alunos tivessem presentes as suas estratégias e conclusões.

Este tipo de trabalho na aula possibilitou que os alunos tivessem um papel importante na construção do seu conhecimento, uma vez que puderam descobrir, questionar e concluir. A estratégia implementada teve sucesso, em grande parte, em virtude dos alunos estarem predispostos para trabalhar e para aprender mais.

3.1.4. Tarefas

Uma aprendizagem eficaz da Matemática está dependente da atividade do aluno nas tarefas propostas pelo professor. Segundo Ponte (2005), existem duas dimensões fundamentais das tarefas: o grau de desafio matemático, relacionado com a dificuldade reduzida ou elevada das questões colocadas, e o grau de estrutura, relacionado com a sua natureza aberta ou fechada. De acordo com esta ideia, o autor classifica os vários tipos de tarefas utilizadas na aula de Matemática segundo o seguinte esquema:

Figura 3 – Tipos de tarefa (Ponte, 2005, p.8)

Todas as tarefas acima referidas assumem um papel importante pelos objetivos que têm, quer sejam estas de construção, de aplicação direta ou menos direta dos conhecimentos.

Ao longo da planificação da unidade de ensino, diversifiquei as tarefas propostas aos alunos, tentando enquadrá-las de forma pertinente na planificação. Assim sendo, utilizei tarefas de exploração, que por serem de desafio mais reduzido permitiram a colaboração de todos os alunos e a sua realização com sucesso, as tarefas de investigação, que por serem mais complexas e pouco encaminhadas contribuíram para o desenvolvimento da capacidade de autonomia dos alunos e da capacidade de "fazer matemática", e os exercícios que proporcionaram uma aplicação dos conhecimentos de forma mais rápida e que me permitiram avaliar o que os alunos retiveram das aulas anteriores.

Para dinamizar esta unidade de ensino foram utilizadas duas tarefas de diagnóstico sobre o tema das sequências e das funções, duas fichas de trabalho, uma minificha sobre os mesmos temas e um teste de avaliação global.

As tarefas utilizadas nas aulas são maioritariamente de natureza investigativa e exploratória, onde o aluno constrói as suas próprias estratégias e invoca os seus conhecimentos prévios. Com efeito, o contributo do aluno permite um maior envolvimento na construção do seu conhecimento e na atribuição de significado a esse mesmo conhecimento.

Tarefas de diagnóstico (anexos 4 e 5)

Estas tarefas permitem diagnosticar o conhecimento prévio dos alunos nos temas a estudar, possibilitando a deteção de lacunas que poderão evidenciar a necessidade de uma maior insistência num dado tema ou uma revisão de alguns aspetos. Com esta análise diagnóstica o professor poderá melhorar a planificação das suas aulas, orientando o trabalho de acordo com os resultados obtidos.

Logo, antes de iniciar a unidade, realizei duas tarefas diagnósticas sobre os temas das Sequências e das Funções. No caso das Sequências, a tarefa diagnóstica tinha em vista perceber se os alunos, tal como previsto no 2.º ciclo, conseguiam explorar sequências repetitivas de forma intuitiva, identificando uma lei de formação e, posteriormente, determinando termos próximos e distantes e termos de ordens variadas utilizando a linguagem natural. Esta tarefa foi adaptada da tarefa 1 "Exploração de padrões, Parte I" de Branco (2008). No caso das Funções, a tarefa tinha como objetivo perceber se os alunos, tal como previsto no 7.º ano, conseguiam analisar uma função a partir da sua representação gráfica, identificando variações, objetos dada a imagem e vice-versa e traduzindo relações de linguagem natural para a linguagem matemática e vice-versa. Esta tarefa foi adaptada da tarefa 6 da página 90 do manual do 7.º ano de Costa e Rodrigues (2010).

Ficha de trabalho sobre sequências (anexo 6)

O tema das Sequências inicia a unidade de ensino e é baseado em tarefas associadas a contextos pictóricos e numéricos de forma a captar o conhecimento prévio dos alunos mais intuitiva e significativamente. Neste estudo foi proposta a realização de uma ficha de trabalho com cinco tarefas que pressupõem que os alunos sejam capazes de: ampliar uma sequência conhecida a sua lei de formação; determinar termos de várias ordens e analisar relações entre termos de uma sequência.

Tarefa 1 (sequências pictóricas no plano):

Esta tarefa foi adaptada da tarefa 5, "Padrões nos azulejos", de Branco (2008). É de natureza exploratória, constituída por questões relativas a dois padrões pictóricos distintos: um primeiro onde a figura vai-se transformando de acordo com a respetiva ordem, obedecendo a uma regra que consiste em adicionar uma coluna de três azulejos (um branco e dois cinzentos), do tipo *kx*, e, um segundo, onde a figura se constrói à semelhança da anterior, conjuntamente com a adição de outras duas colunas de três azulejos (um cinzento e dois brancos), do tipo *kx+b*.

A tarefa foi pensada para ser realizada num bloco de 90 minutos, sendo 45 minutos para a exploração dos alunos a pares (15 minutos para a primeira parte e 30 para a segunda parte), 30 minutos para apresentação e discussão das diferentes estratégias apresentadas pelos alunos (10 minutos para a primeira parte e 20 para a segunda parte) e 15 minutos de síntese das noções de termo e ordem de uma sequência.

A proposta desta tarefa tem como objetivos principais:

- analisar e descrever padrões formulando generalizações a partir de contextos pictóricos;

- determinar o termo geral, termos de várias ordens e ordens correspondentes a vários termos;

- compreender a noção de termo geral de uma sequência e representá-lo simbolicamente;

- identificar expressões algébricas equivalentes.

Inicialmente, pretende-se que os alunos, após análise da sequência e identificação das regularidades, construam a figura seguinte (generalização próxima), associando a ordem do azulejo a uma caraterística da figura – o número de quadrados brancos –, que coincide com a ordem da mesma. De forma a verificar se o raciocínio realizado anteriormente conseguia ampliar a sequência, sustentando uma generalização mais distante, solicitar-se-á a construção de um outro azulejo mais à frente. De seguida, encaminha-se os alunos para explicarem uma regularidade referente aos quadrados cinzentos de cada figura, o triplo do número da figura, com o intuito de progredirem para a representação simbólica das regularidades encontradas.

Esta primeira parte da tarefa encaminha de forma significativa o raciocínio dos alunos, no entanto, é um bom ponto de partida para estes começarem a explorar uma sequência, identificando as suas regularidades e traduzindo generalizações em linguagem natural e algébrica.

Na segunda parte da tarefa, pretende-se que os alunos, após análise da sequência e identificação das regularidades, construam a figura seguinte e estabeleçam relações com o termo anterior, de forma a verificar se estes assimilaram corretamente a lei de formação da figura. Solicita-se mais uma vez que os alunos associem a ordem do azulejo a uma caraterística do mesmo, neste caso o número de quadrados de comprimento do azulejo, propondo um ponto de partida que facilitará a construção de uma figura qualquer.

De seguida, pretende-se iniciar uma análise mais aprofundada da sequência, onde se quer verificar se os alunos indicam corretamente se um número é, ou não, termo da sequência, determinando a respetiva ordem, quando este exista, e, a partir da exploração deste padrão pictórico, se são capazes de construir uma tabela com uma sequência de valores numéricos encontrados de forma recursiva. Assim, os alunos compreenderão a necessidade de generalização da sequência que lhes será solicitada seguidamente, sob a forma de uma expressão algébrica. Aqui dever-se-á confrontar as expressões algébricas apresentadas, solicitando aos alunos a explicação das mesmas com base nas propriedades das figuras da sequência e chamando a atenção para outros conhecimentos, nomeadamente a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e a simplificação de expressões semelhantes.

Por fim, recorrendo a uma expressão, os alunos terão que determinar termos associados a uma determinada ordem e vice-versa. Em virtude da resolução de equações do primeiro grau ser um tópico já estudado, poderão recorrer a procedimentos algébricos formais para responder a estas questões.

Ao longo da discussão gerada após a realização da tarefa, a professora deverá solicitar a intervenção dos alunos, comparando as estratégias que utilizaram, e, sempre que oportuno, acrescentar outras que não tenham sido referidas. Para finalizar a professora deverá discutir com os alunos os conceitos de termo e ordem de uma sequência. Com efeito, de acordo com as indicações presentes nos materiais de apoio ao professor sobre esta temática de Ponte, Branco e Matos (2009b), deve ficar esclarecido que “cada termo está associado a uma determinada ordem e que a relação existente entre ordem e termo pode ser representada por meio de uma expressão algébrica” (p. 14).

Tarefa 2 (sequências pictóricas no espaço):

Esta tarefa foi adaptada da tarefa 2 da segunda ficha de avaliação de Branco (2008). A tarefa é de natureza exploratória, constituída por questões relativas a um padrão pictórico de crescimento do tipo kx+b, onde a figura vai-se transformando de acordo com a respetiva ordem, obedecendo a uma regra que consiste em adicionar quatro cubinhos cinzentos e manter o número de cubinhos brancos.

Esta foi pensada para ser realizada em 35 minutos, sendo 20 minutos para exploração dos alunos a pares e 15 minutos para apresentação e discussão das diferentes estratégias apresentadas pelos alunos.

A sua finalidade principal foi reforçar o trabalho com sequências, agora no espaço, com os objetivos específicos de:

- analisar e descrever padrões formulando generalizações a partir de contextos pictóricos;

- determinar o termo geral, termos de várias ordens e ordens correspondentes a vários termos;

- compreender a noção de termo geral de uma sequência e representá-lo simbolicamente;

- identificar expressões algébricas equivalentes;

- desenvolver a capacidade de visualização espacial.

Aqui pede-se que os alunos, após análise da sequência e identificação das regularidades, analisem o prisma seguinte e de seguida verifiquem a existência, ou não, de um prisma com um determinado número de cubinhos. Depois da argumentação das respostas a estas questões, pretende-se que os alunos formulem generalizações do seu raciocínio através de uma expressão algébrica, e que a utilizem para justificar outras propriedades, nomeadamente a paridade de todos os termos encontrados e a equivalência com outras expressões. Esta equivalência deverá ser fundamentada não só por procedimentos utilizados na simplificação de expressões, mas também pelo seu significado no contexto das figuras.

Tarefa 3 (sequências numéricas):

Esta tarefa foi adaptada da tarefa 68 da página 140 do volume I do manual do 7º ano de Passos e Correia (2010). A tarefa é de natureza exploratória, constituída por questões relativas a um padrão numérico cuja soma dos elementos de cada linha está associada a um crescimento do tipo n^2. É uma tarefa diferente das anteriores por não se apresentar num contexto pictórico, por isso foi pensada para ser realizada em 55 minutos, um tempo superior às restantes tarefas, sendo 30 minutos para exploração dos alunos a pares, 15 minutos para apresentação e discussão das diferentes estratégias apresentadas pelos alunos e 10 minutos para revisão dos conceitos de cubos e quadrados perfeitos.

Aqui a finalidade principal será aprofundar a capacidade de análise e de generalização de uma sequência, agora apenas numérica, com os objetivos específicos de:

- analisar e descrever padrões formulando generalizações a partir de sequências numéricas;

- determinar o termo geral, termos de várias ordens e ordens correspondentes a vários termos;

- compreender a noção de termo geral de uma sequência e representá-lo simbolicamente.

Pretende-se uma vez mais, que os alunos, após análise da sequência e identificação de regularidades na construção da mesma, sejam capazes de descrever a linha seguinte, podendo associar o número da linha a uma característica, ou elemento da mesma, por exemplo o elemento central, de forma a facilitar a descrição de uma outra linha mais à frente, conseguindo facilmente ampliar a sequência. De seguida, é solicitado que os alunos analisem uma outra sequência que é obtida a partir da soma dos elementos de cada linha. Esta é diferente do habitual uma vez que o crescimento passa a ser quadrático, diferentemente das tarefas anteriores. Por fim, os alunos deverão determinar um termo a partir da sua ordem e, de forma intuitiva, determinar, se possível, a ordem a partir de um termo.

Após a realização da tarefa será pertinente rever os conceitos de cubos e quadrados perfeitos, para que os alunos mais facilmente identifiquem uma sequência deste tipo ou similar.

Tarefa 4 (do termo geral à sequência)

Este exercício é da minha autoria, e, contrariamente às tarefas propostas anteriormente, permite a construção dos elementos da sequência a partir de um termo geral dado à priori. Aqui a finalidade principal será reforçar a compreensão da noção de termo geral, termo e ordem através da manipulação simbólica, com os objetivos específicos de:

- compreender a noção de termo geral de uma sequência e representá-lo simbolicamente;

- determinar termos de várias ordens e ordens correspondentes a vários termos;

Por ser um exercício de aplicação de conceitos muito trabalhados nas aulas anteriores, decidi que a parte de exploração pelos alunos deveria ser realizada como tpc, contribuindo assim para um desenvolvimento da sua autonomia no trabalho e, por outro lado, para a identificação individual das suas dificuldades no final deste tema. Durante a discussão do trabalho que os alunos realizaram em casa, com uma previsão de 20 minutos, utilizarei o *geogebra* para fazer um paralelismo entre as resoluções dos alunos, nomeadamente, recorrendo à folha de cálculo, para determinar os termos da sequência a partir do termo geral, e, recorrendo à folha de cálculo e à representação gráfica do termo geral, para verificar se os termos dados seriam termos da sequência, ou não. Desta maneira aproveitarei para trabalhar a capacidade de análise de diferentes tipos de representações (algébrica, tabular e gráfica), para rever algumas aplicações do programa *geogebra,* a utilizar posteriormente, e para fazer uma ponte com o tema das funções.

Nas restantes tarefas, os alunos terão que desenvolver estratégias de resolução para analisar sequências, justificar pontos de vista próprios e discutir opiniões de outros, trabalho essencial na aprendizagem da Matemática. Aqui, apesar de ser um mero exercício de aplicação de conhecimentos e procedimentos algébricos, considero também importante que os alunos trabalhem em contextos puramente matemáticos.

Tarefa 5 (Sequências numéricas II)

Esta tarefa foi adaptada da tarefa 4 da página 34 da brochura "Sequências e funções- materiais de apoio ao professor com tarefas para o 3º ciclo-7º ano" de Ponte, Branco e Matos (2009b). A tarefa é de natureza exploratória, constituída por questões relativas à determinação de termos e termos gerais de várias sequências numéricas com relações idênticas às já estudas.

O objetivo principal desta tarefa foi aprofundar a capacidade de análise e de generalização de uma sequência numérica, com os objetivos específicos de:

- analisar e descrever padrões formulando generalizações a partir de sequências numéricas;

- determinar o termo geral, termos de várias ordens e ordens correspondentes a vários termos.

Por ser um exercício de aplicação de conceitos muito trabalhados nas aulas anteriores, decidi, mais uma vez, que a parte de exploração pelos alunos deveria ser realizada como tpc. A discussão do trabalho que os alunos realizaram em casa teria uma previsão de 25 minutos.

Nesta tarefa, com base nas regularidades identificadas, os alunos descobrirão termos intermédios de várias sequências, algumas já conhecidas, tal como os números naturais, números pares, números ímpares e cubos perfeitos e, de seguida, estabelecer uma relação entre cada termo e a respetiva ordem, de forma a determinar o termo geral correspondente.

Ficha de trabalho sobre funções (anexo 7)

O tema das funções surge como uma continuação do estudo das sequências e deve proporcionar a exploração das suas várias representações (em linguagem natural, sob a forma de tabela, gráfico ou algebricamente) e desenvolver-se maioritariamente em situações contextualizadas, ou seja, recorrendo a tarefas que retratem situações inspiradas na realidade de formar a captar o conhecimento prévio dos alunos mais significativa e intuitivamente.

Neste estudo foram utilizadas cinco tarefas de uma ficha de trabalho, uma tarefa de investigação e alguns exercícios de aplicação do manual adotado, que, de acordo com os conhecimentos prévios dos alunos, pressupõem que estes sejam capazes de: compreender o conceito de função como relação entre duas variáveis e utilizar as suas várias notações; identificar pares ordenados no plano cartesiano; analisar uma função a partir das suas representações; interpretar a variação de uma função representada por um gráfico; analisar e representar algebricamente situações de proporcionalidade direta, compreendendo os conceitos de razão, proporção e constante de proporcionalidade e resolver problemas envolvendo situações de proporcionalidade direta.

Tarefa 1 “Interpretação de gráficos - Passeio a pé”

Esta tarefa foi adaptada da tarefa 6, “Passeio a pé”, de Matos (2007). A tarefa é de natureza exploratória, constituída por questões relativas à leitura e interpretação de um gráfico que descreve uma situação da realidade. Em virtude de ser uma tarefa de revisão de conteúdos, a sua realização será feita em casa e corrigida posteriormente na aula, com um tempo previsto de 20 minutos.

Aqui a finalidade principal é rever a capacidade de interpretação gráfica, com os objetivos específicos de:

- identificar, graficamente, uma imagem dado um objeto e vice-versa;
- interpretar gráficos que representam situações reais;
- interpretar a variação numa situação representada graficamente.

Nas primeiras alíneas pretende-se que os alunos identifiquem, graficamente, objetos correspondentes a imagens dadas e vice-versa. Apesar destes conceitos não estarem explícitos nas questões, dever-se-á aproveitar o momento para os rever, assim como as noções de variável dependente e independente.

De seguida, a partir da análise gráfica, pretende-se que os alunos interpretem a variação da distância em função do tempo, e a relacionem com a ideia de rapidez, associada ao conceito de velocidade média, já estudado em Físico-Química. Aqui será oportuno estabelecer uma relação entre a velocidade e a inclinação da reta que descreve o seu movimento. Por fim, pretende-se que modelem graficamente uma nova função distância que representa a variação da distância ao longo do percurso a um ponto de referência, o local de partida, capacitando os alunos a converterem informação representada em linguagem natural para linguagem gráfica.

Tarefa 2 "Funções afim em linguagem natural - O contador da água"

Esta tarefa foi adaptada da tarefa 8, da página 125 do volume I do manual do 8.º ano de Costa e Rodrigues (2011). A tarefa é de natureza exploratória, constituída por questões relativas à modelação de duas situações contextualizadas, representadas em linguagem natural e que deverão servir de base para a representação algébrica de funções afim, uma linear e outra não linear.

A tarefa foi pensada para ser realizada em 70 minutos, sendo 40 minutos para exploração dos alunos a pares e 30 minutos para apresentação e discussão das diferentes estratégias apresentadas pelos alunos, onde será realizada uma síntese das aprendizagens envolvidas.

Esta tarefa tem como objetivos principais:

- identificar uma imagem dado um objeto e vice-versa;
- representar algébrica e graficamente situações de proporcionalidade direta;
- relacionar a função linear como uma situação de proporcionalidade direta;
- representar gráfica e algebricamente uma função afim;
- distinguir as funções afim, lineares e não lineares.

A tarefa está dividida em duas partes: uma primeira, onde se trabalha com uma situação representada em linguagem natural envolvendo uma função afim linear, ou seja, de proporcionalidade direta, e uma segunda onde está envolvida uma função afim não linear. Ambas as funções modelam matematicamente duas situações contextualizadas.

Na primeira parte da tarefa pretende-se que os alunos mobilizem os conhecimentos adquiridos no ano letivo anterior relativos à modelação de situações de proporcionalidade direta, nomeadamente, determinação de objetos dadas imagens, e vice-versa, determinação de constante de proporcionalidade direta, construção de tabelas e de gráficos e, após toda esta análise, progressão para o processo de generalização, através de expressões algébricas.

Na segunda parte da tarefa colocam-se questões idênticas à primeira parte, mas agora numa situação representada em linguagem natural envolvendo uma função afim não linear. Aqui dever-se-á fazer uma chamada de atenção para a distinção entre as duas situações, solicitando aos alunos que identifiquem as caraterísticas gráficas e algébricas de onde resulta essa diferença. Por fim, pretende-se que os alunos explorem simultaneamente as duas funções referidas acima de forma a interpretarem o ponto de interseção do gráfico das mesmas no contexto da tarefa.

Ao longo desta tarefa os alunos terão oportunidade de trabalhar as funções afim nas suas diversas representações. Os alunos terão ao seu dispor o programa *geogebra* a utilizar sempre que acharem adequado, contribuindo para uma visão mais dinâmica do gráfico de funções afim e para a confirmação dos resultados obtidos ao longo da exploração questões da tarefa.

Após a discussão das estratégias e resultados apresentados pelos alunos deverá ser feita uma sistematização dos aspetos mais formais relativos à função afim, nomeadamente respetiva definição algébrica, noções de declive e ordenada na origem e principais caraterísticas do seu gráfico.

Tarefa 3 (Função afim em tabela – O vendedor de automóveis)

Esta tarefa foi adaptada do exemplo 11 da página 135 da brochura da Álgebra de Ponte, Branco e Matos (2009a). A tarefa é de natureza exploratória, constituída por questões relativas a uma situação contextualizada representada através de uma tabela e que é modelada por uma função afim não linear. A exploração da tarefa pelos alunos será realizada em casa, pelo que na aula reservaremos 30 minutos para discussão dos resultados e estratégias apresentadas pelos alunos. Deverão ser contemplados mais 15 minutos para síntese das aprendizagens envolvidas.

O propósito desta tarefa é a determinação, contextualizada dos valores do declive e da ordenada na origem da função afim, para além disso esta tem como objetivos principais:

- identificar uma imagem dado um objeto e vice-versa;

- representar algebricamente uma função afim.

Esta tarefa inicia-se com determinação de um valor fixo do ordenado (associado à ordenada na origem) e um valor variável do mesmo (associado ao declive), que os alunos deverão encontrar facilmente por observação dos dados da tabela. Dever-se-á promover a discussão do significado das duas constantes encontradas, quer no contexto do problema, quer gráfica e algebricamente.

Os alunos deverão verificar que algébrica ou graficamente, e apesar de existir uma variação constante do ordenado, esta situação não representa uma função de proporcionalidade direta. Embora não seja solicitado, dever-se-á alertar os alunos para a representação gráfica desta situação que, pelo facto do número de carros ser um valor discreto, será um conjunto de pontos isolados. Após a conclusão da discussão da tarefa, será oportuno fazer uma síntese do processo utilizado pelos alunos para determinação do valor do declive e ordenada na origem, dados dois objetos não nulos e respetivas imagens.

Tarefa 4 (Funções afim graficamente – A corrida)

Esta tarefa foi adaptada do exemplo da página 123 da brochura da Álgebra de Ponte, Branco e Matos (2009a). A tarefa é de natureza exploratória, constituída por questões relativas à modelação de duas situações contextualizadas representadas graficamente e que deverão servir de base para a representação algébrica de funções afim, uma linear e outra não linear. Em virtude de, ao longo da unidade didática, já se ter trabalhado com situações deste género, com objetivos idênticos, apenas destinei 45 minutos para a realização da tarefa, sendo 25 minutos para exploração dos alunos a pares e 20 minutos para apresentação e discussão das diferentes estratégias apresentadas pelos alunos.

O propósito fundamental desta tarefa é o reforço da distinção entre situações de proporcionalidade direta, ou não, tendo como objetivos principais:

- identificar uma imagem dado um objeto e vice-versa;

- analisar graficamente funções afim;

- representar algébrica funções afim;

- distinguir as funções afim, lineares e não lineares.

Inicialmente pretende-se que os alunos analisem a situação descrita graficamente e determinem o valor da velocidade média ao longo da corrida nos dois casos. Deverão constatar que num dos casos estamos perante uma situação de proporcionalidade direta e noutra não, apesar de existir uma taxa de variação constante em ambas – a velocidade média. Os alunos deverão saber justificar que este facto se deve à existência de um avanço inicial nulo ou não. De seguida, a velocidade determinada deverá ser associada ao valor do declive e o avanço inicial à ordenada na origem, partindo-se assim para o processo de generalização formal, através da construção das respetivas expressões algébricas. Nas questões seguintes, será solicitada a determinação de objetos dadas as respetivas imagens, e vice-versa. Durante a discussão a professora deverá solicitar todos os contributos dos alunos baseados em diferentes estratégias utilizadas. Mais uma vez dever-se-á chamar à atenção para a distinção entre as duas situações, a partir das caraterísticas gráficas e algébricas de ambas. Por fim, pretende-se que os alunos explorem simultaneamente as duas funções afins lineares e não lineares de forma a interpretarem o ponto de interseção do gráfico das mesmas no contexto da tarefa.

Tarefa 5 (Função afim algebricamente - A área do polígono)

Esta tarefa foi adaptada da tarefa 11, da página 133 do volume I do manual do 8.º ano de Costa e Rodrigues (2011). A tarefa em causa é um exercício de aplicação puramente matemático sobre a função afim, suportado por um contexto geométrico. Aqui deverão ser destinados 40 minutos para a sua realização, sendo 25 minutos para exploração dos alunos a pares e 15 minutos para apresentação e discussão dos resultados.

A finalidade principal será reforçar o trabalho com expressões algébricas, através da sua manipulação simbólica, com os objetivos específicos de:

- identificar uma imagem dado um objeto e vice-versa;

- representar algebricamente situações apresentadas em contexto geométrico.

Apesar das capacidades que se desenvolvem no trabalho com situações contextualizadas no tema das funções ser fundamental, este deve ser uma base para o trabalho a realizar em contextos puramente matemáticos. Assim sendo, e após todo um trabalho de construção de significados a partir de determinados contextos realizado nas tarefas anteriores, neste exercício os alunos devem ser capazes de trabalhar com funções afim dadas algebricamente.

De forma a entenderem a construção da expressão dada, os alunos, recorrendo à figura dada, deverão mostrar que a área do polígono é definida em função de uma variável que pode tomar vários valores, num domínio limitado que é facilmente determinado por observação da figura. Assim surge uma oportunidade para os alunos trabalharem simbolicamente, construindo um raciocínio demonstrativo, fundamental na atividade matemática.

A partir da expressão algébrica pretende-se que os alunos determinem objetos dadas as respetivas imagens e vice-versa, confrontando os resultados obtidos com a sua interpretação geométrica.

Exercícios e tarefas do manual (anexo 8)

Tarefa 3 do manual:

Aqui realizar-se-ão as alíneas 1, 2 e 4 da tarefa que se encontra na página 98 do volume I do manual adotado de Magro, Fidalgo e Louçano (2011). A tarefa é de natureza investigativa, constituída por questões relativas ao estudo da influência dos parâmetros da expressão algébrica da função afim na respetiva representação gráfica.

A tarefa foi pensada para ser realizada em 90 minutos, sendo 45 minutos para exploração dos alunos a pares, 30 minutos para apresentação e discussão das diferentes estratégias apresentadas pelos alunos e 15 minutos para síntese das aprendizagens envolvidas.

Esta tarefa tem como objetivos principais:

- analisar uma função a partir das suas representações;
- representar graficamente funções afim;
- estudar o efeito da variação dos parâmetros k e b na representação gráfica de funções definidas por $y = kx+b$, sendo k e b números reais;
- interpretar a variação numa situação representada graficamente.

Na primeira questão pretende-se que os alunos estudem funções afins representadas por retas com o mesmo declive, concluindo que retas paralelas têm o mesmo valor para o parâmetro k e que b corresponde à ordenada do ponto onde a reta que representa a função intersecta o eixo Oy.

O segundo item permitirá aos alunos concluírem que funções com o mesmo valor do parâmetro k são representadas por retas paralelas, caso contrário serão concorrentes.

Na última questão, onde é fixado o valor do parâmetro b, os alunos deverão perceber que a variação da inclinação das retas é influenciada exclusivamente pelo valor do parâmetro k e que este, dependendo do valor ser positivo, negativo ou nulo está associado ao facto da função ser crescente, decrescente ou constante, respetivamente. Também se deverá discutir a influência do valor do parâmetro k na maior ou menor inclinação da reta que representa a função afim.

Após a discussão dos resultados apresentados deverá ser feita uma sistematização das aprendizagens relativas à influência dos parâmetros da expressão algébrica da função afim na sua representação gráfica, sendo que a partir daqui os alunos deverão ser capazes de esboçar o gráfico de qualquer função afim representada algebricamente. Este será também um bom momento para relembrar que a função linear é um caso particular da função afim.

Para tornar mais rápida a resolução desta tarefa, e abandonando momentaneamente procedimentos algébricos rotineiros, os alunos recorrerão ao programa *Geogebra*. A utilização deste recurso contribuirá para uma visão mais dinâmica da representação gráfica das funções afim.

Exercícios de aplicação do manual:

Neste momento realizar-se-ão os exercícios 3 da página 98, 2, 4 e 7 da página 109 e 2 e 4 da página 112 do volume I do manual adotado de Magro, Fidalgo e Louçano (2011).

Estes exercícios, agora num contexto puramente matemático, servirão para a avaliação das aprendizagens dos alunos. A resolução dos exercícios foi pensada para uma aula de 90 minutos, onde os alunos trabalharão individualmente. As correções serão feitas no quadro pelos alunos ou pela professora com a participação destes.

Aqui a finalidade principal será consolidar os conhecimentos relacionados com funções afim e enfatizar o trabalho simbólico, com os objetivos específicos de:

- analisar uma função a partir das suas representações gráfica e algébrica;

- identificar uma imagem dado um objeto e vice-versa;

- representar graficamente funções afim;

- analisar o efeito da variação dos parâmetros k e b na representação gráfica de funções afim.

Na primeira parte da aula serão resolvidos alguns exercícios de aplicação sobre funções lineares e de seguida sobre funções afim não lineares. No exercício 2 e 4 da página 109 o objetivo é determinar a expressão algébrica de uma função linear representada graficamente e representar o gráfico de uma função linear definida algebricamente. O exercício 7 da página 109 explora novamente as questões referidas nos exercícios anteriores, juntamente com a determinação de objetos dadas imagens e vice-versa, a partir da expressão algébrica de uma função linear. Este exercício terá uma grande componente simbólica, nomeadamente as representações $f(k)=x$ e $f(x)=k$, que deverão ser trabalhadas com os alunos de forma a minimizar as dificuldades que habitualmente originam.

No exercício 3 da página 98, recorrendo à análise gráfica de funções afim não lineares, os alunos deverão indicar objetos dadas imagens e vice-versa e construir expressões algébricas recorrendo a propriedades gráficas. No exercício 2 da página 112 deverão associar as representações algébrica e gráfica através das características de ambas. Por fim, no exercício 4 da página 113, pretende-se que façam uma análise simultaneamente gráfica e algébrica de uma função afim, de forma a determinarem objetos dadas as respetivas imagens e vice-versa.

Tarefas de avaliação/revisão (anexos 9, 10 e 11)

Em relação à avaliação dos alunos, ao longo da unidade didática, foram tidos em conta os parâmetros referidos nos critérios de avaliação definidos em departamento, nomeadamente, a persistência, o empenho e a cooperação nas atividades resolvidas em sala de aula, a pertinência e qualidade das intervenções orais, o sentido de responsabilidade e autonomia, refletido na realização dos trabalhos de casa, e a existência de dois momentos mais formais de avaliação – uma minificha e uma ficha de avaliação.

Estes momentos têm como objetivo avaliar as aprendizagens realizadas por cada um dos alunos durante a unidade de ensino. Com efeito, a minificha de avaliação foi construída com o intuito de fazer um ponto da situação das aprendizagens realizadas no tema que acabámos de abordar, permitindo a deteção de lacunas e dificuldades dos alunos e contribuindo para a sua superação através do esclarecimento de dúvidas. Em relação à ficha de avaliação, esta tem um caráter mais global, que permite incutir nos alunos hábitos de estudo contínuo e ter um contato com situações de avaliações idênticas aos testes intermédios e aos exames.

Antes da realização da ficha de avaliação foram esclarecidas as dúvidas referentes a uma ficha de revisão que os alunos realizaram em casa, com o intuito de preparar os alunos para o momento de avaliação, através de uma revisão global da matéria.

Ao longo da planificação da proposta pedagógica, tentei encadear a sequência das tarefas de forma a fazer os alunos seguir um percurso de aprendizagem que me parecesse coerente, diversificando as tarefas propostas em relação ao contexto, duração e tipologia das mesmas. No entanto, incidi especialmente, nas tarefas de exploração por permitirem um trabalho mais produtivo e autónomo dos alunos, uma vez que, tal com Ponte (2005) afirma, nelas o aluno consegue começar a trabalhar desde logo sem muito planeamento, facto que motiva o seu envolvimento nas aulas e cria oportunidades de verdadeira experiência matemática, favorecendo a aprendizagem.

Para além do trabalho a pares, maioritariamente utilizado ao longo das aulas, também tive o cuidado de proporcionar momentos de trabalho individual, principalmente na resolução de exercícios de consolidação de conhecimentos, de forma a perceber se as aprendizagens que evidenciavam a pares, e após discussão, estavam a ser apropriadas por todos os alunos. Desta forma espero contribuir para uma aprendizagem de qualidade dos alunos onde as dificuldades que estes revelam nestes temas sejam atenuadas.

3.2. Descrição da concretização das aulas

No início de cada aula entreguei as fichas com as tarefas ou indiquei a página do livro onde íamos trabalhar. Em cada uma das aulas foi efetuada uma breve introdução, estabelecendo, sempre que possível, uma ligação com as aulas anteriores e informando os alunos do objetivo da aula. Relativamente às tarefas, foi realizada uma breve descrição do seu conteúdo e, de seguida, dado algum tempo para leitura do enunciado e clarificação de dúvidas que surgissem. Ao longo das aulas fui solicitando aos alunos que realizassem as tarefas em folhas à parte e que, no momento de discussão, não corrigissem nada nessa folha, devendo fazê-lo no caderno.

Os alunos encontram-se sentados dois a dois, segundo uma planta por mim proposta e que tem em conta o seu comportamento e aproveitamento, de forma a facilitar o trabalho a pares. Assim, ao longo da Unidade de Ensino, com exceção das tarefas realizadas individualmente, o modo de trabalho utilizado foi a pares, permitindo que os alunos discutissem e trocassem ideias, ajudando-se simultaneamente, mas sem gerar muita agitação na aula e permitindo um melhor controlo sobre o trabalho efetivamente realizado por cada aluno. Em geral, verifico que este modo de trabalho tem funcionado, apesar de, no final de cada período, serem sempre feitas algumas alterações na organização dos pares.

De seguida farei uma descrição do trabalho desenvolvido ao longo da unidade de ensino, contemplando a minha atuação e o trabalho dos alunos, nomeadamente as suas vivências e o seu desempenho nas tarefas, destacando os aspetos mais significativos do desenvolvimento das aulas ao nível das estratégias e dificuldades apresentadas.

3.2.1. Tópico das sequências

Primeira aula (23/01/13)

Duração: 90 minutos

Sumário: Sequências pictóricas no plano (resolução de uma ficha de trabalho)

Os alunos foram informados de que o tema das sequências era uma continuação do trabalho desenvolvido no 2.º ciclo, mas um pouco mais elaborado e formalizado.

De seguida começaram a leitura da primeira parte da tarefa, sem terem solicitado a minha ajuda para interpretação do enunciado da mesma. Durante a exploração das questões não surgiram dúvidas, sendo que me deslocava pelos grupos para tentar perceber as estratégias que estavam a ser utilizadas, bem como compreender as principais dificuldades que iam surgindo e sendo discutidas entre os pares.

A certa altura um dos alunos pergunta:

Aluno D: …uma expressão é com x?

Professor: Sim, pode ser com x, com b, com 2 e 4… Uma expressão pode ter números, letras, operações, parêntesis. Existem várias expressões que podem ser numéricas, só envolvem números, ou algébricas, têm também letras.

Aluno J: Sim, não te lembras? É o que demos o ano passado para simplificar.

Ao longo da discussão da tarefa, foram surgindo estratégias baseadas em raciocínios diferentes. Em relação ao que representa o número do azulejo, alguns alunos, associaram-no a mais do que uma característica de cada azulejo, por exemplo:

Figura 4 – Exemplo de resolução da alínea b) da tarefa 1 da ficha sobre sequências

Nas questões de determinação do número de quadrados brancos e/ou cinzentos, nota-se que os alunos já não precisam de representar todas as figuras até à que é solicitada, partindo para outras estratégias, nomeadamente recorrendo a uma relação com a figura anterior, raciocínio recursivo, o que nem sempre facilitará o processo de formalização algébrica, mas também alguns começando a associar caraterísticas das figuras à sua ordem.

Nas últimas alíneas os alunos recorreram a várias estratégias, associando o número de quadrados cinzentos ao dobro do número de brancos e de forma semelhante o número total de quadrados ao tripo de quadrados brancos, e alguns alunos usam já uma expressão algébrica, para representar o termo geral, tal como se segue:

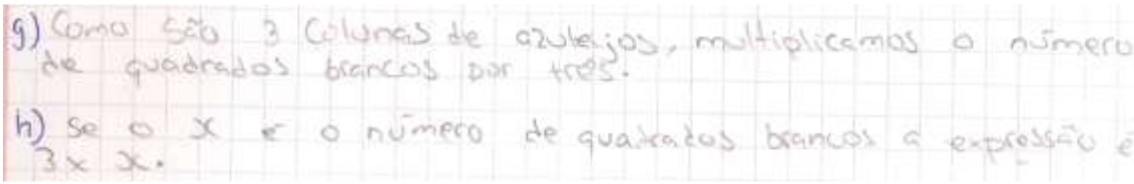


Figura 5 – Exemplo de resolução das alíneas g) e h) da tarefa 1 da ficha sobre sequências

Outros alunos associaram o número total de quadrados ao tripo do número do azulejo, ou seja, da ordem do termo:

Figura 6 – Exemplo de resolução das alíneas e) e g) da tarefa 1 da ficha sobre sequências

No entanto, alguns alunos, apenas referem que "…são os múltiplos de 3", não apresentando uma relação explícita entre o termo e a respetiva ordem.

Alguns alunos ao comunicarem as suas ideias por escrito (como acima) ou oralmente evidenciam que já começam a usar a linguagem matemática na escrita de expressões mas ainda existem muitas dificuldades na sua compreensão. Por exemplo, após a apresentação das estratégias anteriores, uma aluna continuou com algumas dúvidas sobre expressões:

Aluna M: Stôra então $3\times x$ é igual a $3x$?
Professora: Sim.
Aluna M: Porquê?
Professora: Então para simplificar a escrita, o sinal de vezes pode ser substituído por um ponto ou até mesmo omitir-se. E isto pode acontecer sempre? (perguntando para toda a turma)
Vários alunos: Sim.

Vários alunos: Não.

Aluna M: Para a professora estar a perguntar, se calhar não!

Professora: Então por exemplo, 3x2 é o mesmo que 32?

Aluno J: Não, por isso é que só se pode quando temos letras. Stôra, também é melhor não escrevermos 3.2, pois ainda confundimos com a vírgula, como na calculadora.

Professora: Exatamente.

Aluna M: Então 3x é a expressão e o que é que resolvemos?

Professora: Parece-me que está a confundir expressão com equação! As expressões só se simplificam, as equações é que se podem simplificar para depois resolver.

Aluno R: Então qual é a diferença entre equação e expressão?

Professora: Boa pergunta R!

Fiz uma pausa para explicar a diferença entre uma equação e uma expressão pois considerei que seria importante para evitar o uso indevido dos sinais de equivalente e igual.

Após ter perguntado se mais alguém tinha justificado de maneira diferente, apercebi-me que um dos pares tinha determinado o número de quadrados de cada cor a partir do número de quadrados total, em vez de fazer o contrário, o que os impediu de encontrar uma expressão para o número total de quadrados em função da ordem da figura.

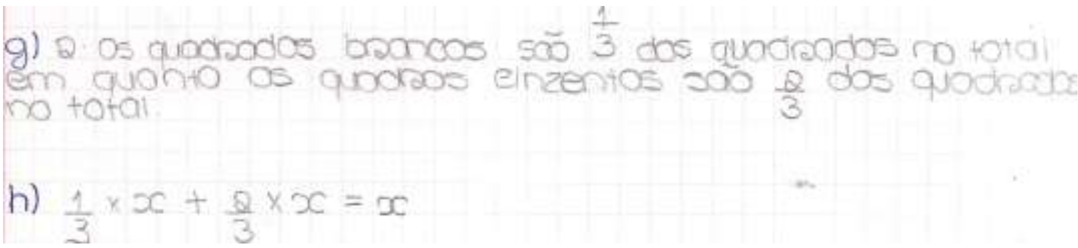


Figura 7 – Exemplo de resolução das alíneas g) e h) da tarefa 1 da ficha sobre sequências

Nota-se que alguns alunos, apesar de pensarem corretamente, ainda não conseguem exprimir por escrito as suas ideias corretamente, por exemplo, escrevendo azulejo em vez de coluna, ou “sob 3” em vez de triplo.

Após a discussão da primeira parte da tarefa, pareceu-me oportuno realizar uma síntese das noções de termo, ordem e termo geral de uma sequência.

No início da leitura da segunda parte da tarefa, alguns alunos necessitaram da minha ajuda por terem algumas dúvidas na continuação da construção da sequência, em virtude de não perceberem que a construção era feita acrescentado novos quadrados a cada termo da sequência anterior. Possivelmente, se no desenho constasse o azulejo número 4 não teriam surgido estas dúvidas.

Nas seguintes alíneas, os alunos mais uma vez utilizaram estratégias associadas a dois tipos de argumentação que estão baseados na decomposição da figura para dar sentido às operações inversas, como se verifica de seguida, sendo que o segundo tipo de raciocínio foi o mais utilizado:

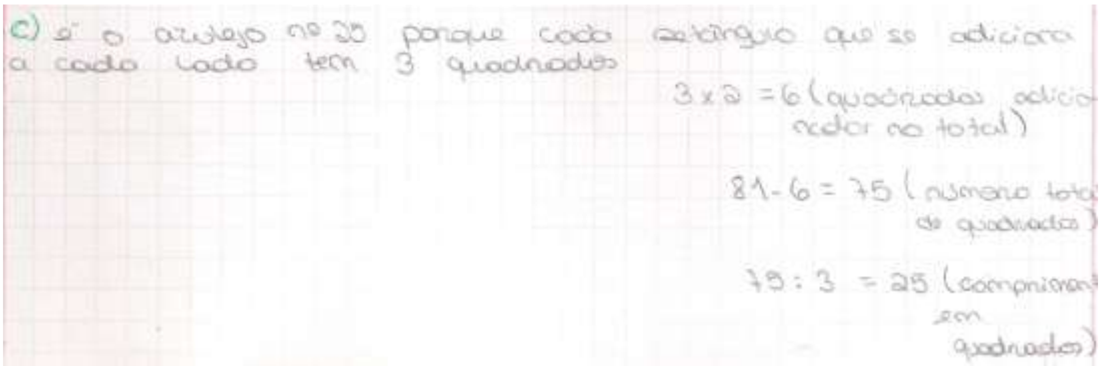


Figura 8 – Exemplo de resolução da alínea c) da tarefa 1 da ficha sobre sequências

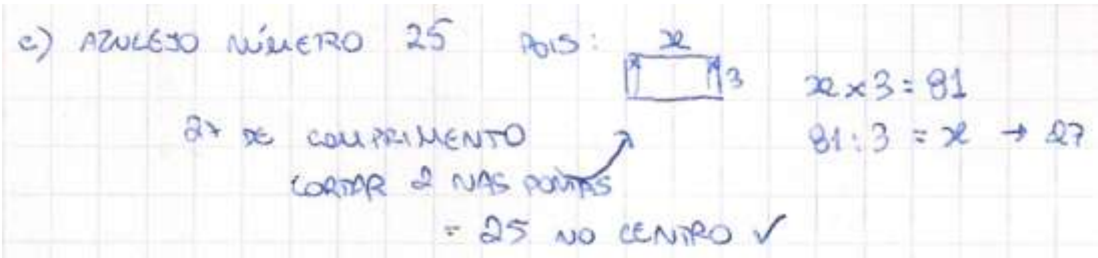


Figura 9 – Exemplo de resolução da alínea c) da tarefa 1 da ficha sobre sequências

Ao longo desta questão dois grupos de alunos manifestaram algumas dificuldades, solicitando a confirmação da professora, tal como ilustra o diálogo seguinte.

Aluna R: Oh, stôra a mim não… o 81 não dá!
Professora: Então explique lá o que fez, R.
Aluna R: Então, eu pensei em 81-2 porque tenho que tirar os das pontas e depois 79:3 porque são três colunas deitadas. Mas 79:3 não dá!
Professora: Oh R., o que é que quer tirar das pontas?
Aluna R: Estas duas ao alto.
Professora: E as duas colunas têm quantos quadrados?
Aluna R: Seis! Ah, e eu tirei só dois. Já percebi…

Para justificar que um termo não pertencia à sequência, os alunos não apresentaram dificuldades, utilizando a noção de múltiplo de 3 que foi corretamente enunciada, como ilustram os exemplos em baixo:

Figura 10 – Exemplo de resolução da alínea d) da tarefa 1 da ficha sobre sequências

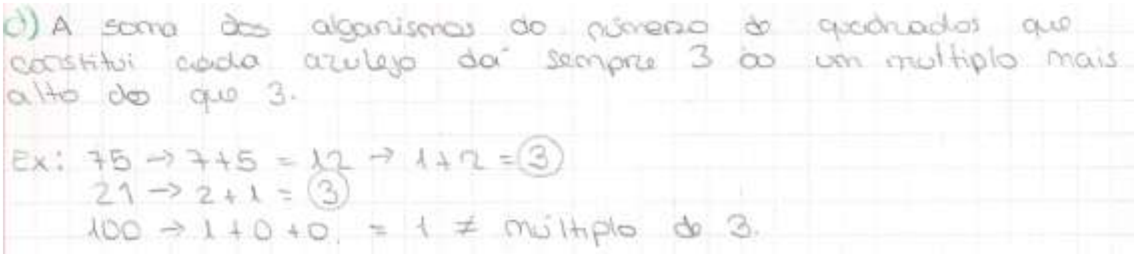


Figura 11 – Exemplo de resolução da alínea d) da tarefa 1 da ficha sobre sequências

É de notar que alguns alunos conseguiram utilizar uma linguagem matemática correta baseada em conhecimentos prévios.

Após a discussão que ocorrida anteriormente sobre a diferença entre expressão e equação era de esperar que a noção de fórmula também surgisse, mas quanto a esta noção os alunos pareceram-me mais familiarizados, fazendo um paralelismo com as fórmulas que utilizam em Físico-Química. Em relação à generalização do número total de quadrados, como seria de esperar, os alunos utilizaram um raciocínio de acordo com os das alíneas anteriores, tendo chegado às fórmulas $Q = 3N + 6$ e $Q = 3(N + 2)$. Facilmente identificaram que essas expressões eram equivalentes aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Para além das fórmulas referidas em cima, um dos pares, contrariamente ao solicitado no enunciado, escreveu uma fórmula associada ao número de azulejos brancos, número do azulejo na primeira parte da tarefa, em vez do número do azulejo da nova sequência, tal como ilustra a figura que se segue:

Figura 12 – Exemplo de resolução da alínea f) e g) da tarefa 1 da ficha sobre sequências

Em virtude dos alunos não terem indicado mais nenhuma ideia, aleguei ter pensado na fórmula $Q = (N + 2) + (N + 2) + (N + 2)$, que facilmente foi identificada, pelos alunos, como sendo equivalente às que tinham encontrado, o que podia ser verificado através de uma simplificação da expressão. No entanto, mas quando lhes solicitei que relacionassem este raciocínio com a figura foi preciso alguma ajuda da minha parte.

Nem todos os alunos conseguiram acabar as duas últimas alíneas de utilização da fórmula, mas todos facilmente as perceberam após a discussão das mesmas. Por fim, referi que nas tarefas com sequências é uma ajuda fundamental que os alunos procurarem identificar uma característica da figura que esteja associada ao número do azulejo, facilitando assim a construção da expressão algébrica, ponto-chave na capacidade de generalização, neste nível de escolaridade.

De uma forma geral, a realização desta tarefa decorreu de forma bastante positiva e foi uma oportunidade para os alunos se começarem a sentir à vontade no trabalho com sequências, nomeadamente no processo de generalização e no uso e interpretação de expressões algébricas.

Segunda aula (30/01/13)

Duração: 90 minutos

Sumário: Sequências pictóricas no espaço e sequências numéricas (continuação da resolução da ficha de trabalho)

A aula começou com uma breve revisão do que tinha sido feito na aula anterior e os alunos foram informados que, de seguida, continuaríamos o trabalho com sequências de figuras no espaço e apenas com números. Os alunos iniciaram a leitura da tarefa, tendo rapidamente estabelecido semelhanças com a tarefa realizada na aula anterior.

A realização da tarefa decorreu sem grandes dificuldades, sendo as estratégias adotadas idênticas às que surgiram na tarefa da aula anterior e alguns alunos, para evitar cometer os mesmos erros, recorreram à comparação de termos consecutivos para construir os restantes. No entanto, o grupo da R., não conseguiu verificar corretamente a ordem do prisma com 36 cubos.

Todos os alunos encontraram sem dificuldade a expressão relativa ao número de cubos cinzentos, e ao longo da discussão a L., necessitou de confirmar se $4 \times n$ era o mesmo que $n \times 4$, que justificou inicialmente com a utilização da propriedade distributiva e posteriormente retificou referindo que seria a propriedade comutativa da multiplicação.

No entanto, em relação ao número total de cubos nem todos os grupos conseguiram chegar à expressão sem a minha ajuda, tal como ilustra o seguinte diálogo, em que o aluno abandonou o contexto geométrico e passou a trabalhar apenas com o número de cubos do prisma.

> Aluno N: Então vai sempre de 4 em 4, mas não é x+4, e também não pode ser só a tabuada do 4.
> Professora: Pois não porque não começa em 4. Mas então onde começa?
> Aluno N: No 12.
> Professora: E então o que fizeste à tabuada do 4?
> Aluno N: Avancei 8.
> Professora: O que são esses oito na figura?
> Aluno N: Não sei!
> Professora: Não há nada que na figura se mantenha sempre oito?
> Aluno N: Há, os brancos.
> Professora: Então será que o número de cubos são dados pela tabuada do 4 mais o 8 que é fixo?
> Aluno N: Sim, fica $4n \times 8$.
> Aluno D (colega do lado): Não, $4n + 8$.

De seguida a justificação da paridade foi realizada corretamente, tendo os alunos alegado que qualquer número da tabuada do 4, ou múltiplo de 4, é sempre par.

Em relação à última alínea, que a maioria dos alunos justificou recorrendo à propriedade distributiva, um dos pares perguntou se não podia substituir o *n* pelos números dos prismas e ver que dava sempre. Confrontada com esta situação alertei os alunos que os casos particulares ajudam-nos a encontrar o que acontece no geral, mas que por si só não servem de justificação para esta alínea.

Novamente quando confrontados com a interpretação geométrica da expressão os alunos mostraram-se reticentes. Apesar de a maioria ter construído facilmente a expressão que para eles fazia sentido, a justificação de percursos alternativos continua a ser importante.

Relativamente à tarefa da sequência numérica, a maioria dos pares, começou a manifestar dificuldades em fazer generalizações distantes e formalizações em relação à adição, dado que esta era menos facilmente visualizada do que a construção da própria linha. Os alunos começaram, então, a procurar vários tipos de regularidades, como a relação entre o número de elementos de cada linha e o número da linha, tal como ilustra o que se segue:

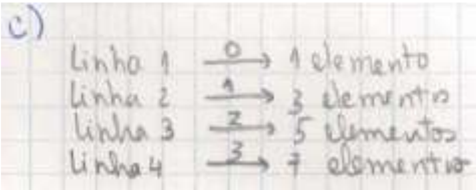


Figura 13 – Exemplo de resolução da alínea c) da tarefa 3 da ficha sobre sequências

Em virtude de ter constatado que os alunos estavam a demorar muito tempo, dispersando-se na procura de regularidades e sem chegarem a conclusões que estivessem de acordo com o enunciado, tentei alertá-los para a necessidade de procurarem regularidades que contribuíssem para a realização das questões seguintes, nomeadamente associando alguma caraterística da sequência da soma ao número da linha.

De seguida alguns alunos começaram a conseguir estabelecer conexões com a noção de números quadrados, ainda que não a referindo explicitamente, mas conseguindo fazê-lo em linguagem natural, ou até mesmo simbolicamente, tal como ilustra o raciocínio seguinte:

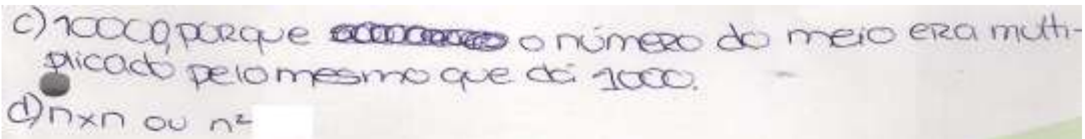


Figura 14 – Exemplo de resolução das alíneas c) e d) da tarefa 3 da ficha sobre sequências

Nesta alínea dois dos grupos, apesar de terem justificado oralmente de forma correta, escreveram a expressão $2n$ em vez de n^2.

Durante a discussão questionei os alunos porque tinha utilizado o número central de cada linha para relacionar com a soma desta, para verificar se estes tinham reparado que esse número coincidia com o número da linha. No entanto, alguns alunos continuaram a não conseguir fazer este raciocínio sozinhos, insistindo em relacionar termos consecutivos, tal como ilustra o diálogo seguinte:

Aluno N: Stôra, mas agora 3, 5, 7 não é nenhuma tabuada!
Professora: Pois não.
Aluno D (colega do lado): Mas 3, 5, 7 vai de dois em 2.

Estes alunos fizeram o seguinte esquema:

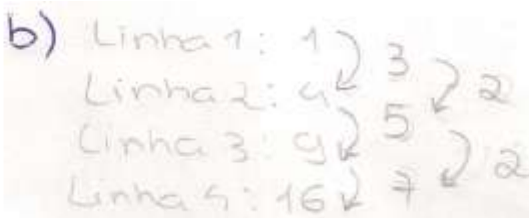


Figura 15 – Exemplo de resolução da alínea b) da tarefa 3 da ficha sobre sequências

Na preparação da aula, em virtude de considerar a sequência dos números quadrados tão intuitiva, não tinha pensado previamente nesta estratégia, mas que seria expectável relativamente à tendência, que a investigação evidencia, de os alunos recorrem a um raciocínio recursivo quando se encontram perante sequências numéricas mais complexas, como é o caso desta.

Na última questão os alunos utilizam principalmente, dois tipos de processos. Alguns recorrem ao seu conhecimento dos números e usam a linguagem natural para explicar o seu raciocínio, enquanto outros aplicam diretamente a operação inversa, indicando a raiz quadrada dos números em causa, tal como ilustra o que se segue:

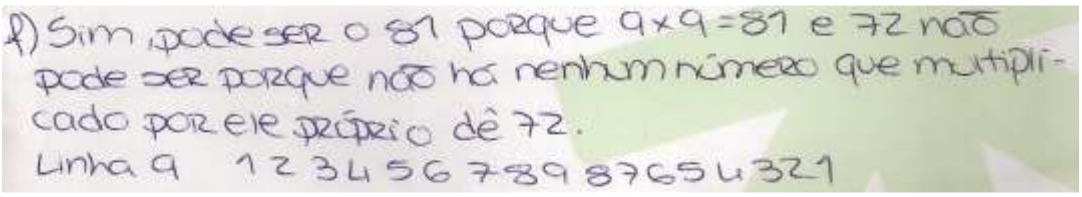


Figura 16 – Exemplo de resolução da alínea f) da tarefa 3 da ficha sobre sequências

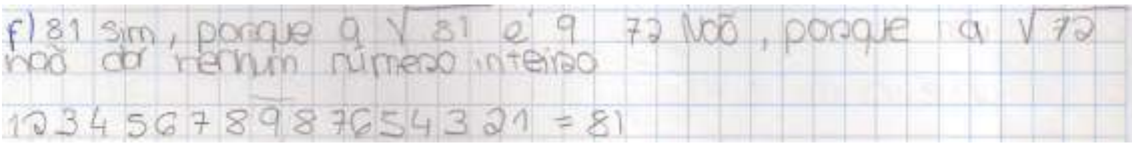


Figura 17 – Exemplo de resolução da alínea f) da tarefa 3 da ficha sobre sequências

Em virtude dos alunos terem manifestando alguma dificuldade na construção desta sequência, fiz uma analogia com um contexto pictórico, desenhando os números quadrangulares, de forma idêntica à da figura que se segue:

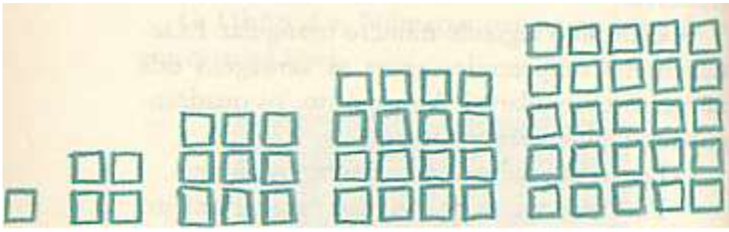


Figura 18 – Sequência de números quadrangulares (http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2002/icm110/)

Como curiosidade expliquei o que são os números triangulares que iremos explorar aquando do tópico das equações do 2.º grau e solicitei aos alunos que procurassem na internet informação sobre o Triângulo de Pascal, tentando descobrir nele algumas regularidades (este tema será objeto de um trabalho de grupo no 2.º período).

Após a realização da tarefa fiz um resumo no quadro, de sequências de referência com as quais os alunos devem estar familiarizados, nomeadamente, as sequências dos números naturais, números pares, números ímpares, múltiplos de 2 e 3 e as sequências dos quadrados ou dos cubos perfeitos e das potências de base 2 ou 3.

Terceira aula (01/02/13)

Duração: 45 minutos

Sumário: Correção do tpc (exercícios sobre termo geral de uma sucessão).

A aula iniciou-se com uma breve revisão do que tinha sido feito na aula anterior. Durante a correção da tarefa 4 utilizei o programa *Geogebra*, com vista a rever alguns procedimentos do mesmo. Através do *Geogebra* a sucessão foi representada graficamente, recorrendo à folha de cálculo e zona gráfica. Os alunos manifestaram alguma dificuldade em entender a introdução da sucessão na folha de cálculo por não estarem muito familiarizados com a mesma. Mas pareceram ficar convencidos das suas potencialidades.

Inicialmente discutiu-se a diferença entre este gráfico e os que tinham trabalhado no 7.º ano, tendo surgido respostas como “não passa pela origem” ou “não é uma reta”. Explorei, em conjunto com os alunos, essas ideias, concluindo-se que a diferença residia no facto de a representação gráfica ser apenas pontos isolados.

Graficamente os alunos não manifestaram muitas dificuldades em corrigir o exercício, no entanto, alguns tiveram dificuldades em confirmar se um termo fazia ou não parte da sequência algebricamente.

Por falta de tempo e, por já termos visto as primeiras alíneas na aula anterior, na tarefa 5 apenas corrigimos as últimas três alíneas. Os alunos manifestaram dificuldades na alínea f, onde, apesar de rapidamente detetarem que andava de 2 em 2, o decréscimo da sucessão surgiu como um obstáculo e, só com ajuda, conseguiriam entender o termo geral da sucessão.

Em geral, os alunos revelaram compreender a estrutura das sequências em estudo, no entanto, manifestaram mais dificuldade nas sequências numéricas por não estarem ilustradas pictoricamente. Pude assim verificar que no estudo das sequências a representação pictórica tem um papel fundamental enquanto alicerce do raciocínio dos alunos. Apesar de trabalhadas, raramente foram utilizadas as palavras de ordem e termo, recorrendo a outros vocábulos que apelam à intuição. Ao longo das tarefas os alunos analisaram e compararam as várias estratégias encontradas e desenvolveram raciocínios significativos relativos à generalização, mesmo quando não utilizaram o simbolismo algébrico.

3.2.2. Tópico das funções

Primeira aula (05/02/13)

Duração: 90 minutos

Sumário: Correção do tpc.

Função afim (realização de uma ficha de trabalho).

A aula iniciou-se com a correção do tpc, tarefa 1, onde as poucas dúvidas que foram surgindo se deveram à interpretação da parte constante do gráfico. Ainda no início da aula foi realizada uma revisão sobre as noções de ordenada e abcissa, que nem todos os alunos se lembravam. De forma a ajudar os colegas, alguns alunos referiram que tinham recorrido a mnemónicas para interiorizar estes termos.

Ao longo da correção da tarefa surgiram alguns diálogos interessantes, nomeadamente, na alínea e):

Aluno D: Para percorrer estes metros, quando esteve parado, em casa do amigo, não conta, né stôra?

Professora: Sim D. Então faça-me lá uma pergunta para que o tempo em que ele esteve parado contasse?

Aluno D: Assim é mais difícil!

A professora coloca a questão à turma e um outro aluno responde:

Aluno R: Ao fim de quanto tempo chega aos 4000m.

Ou na alínea f):

Aluno J: Tem mais pressa à ida.

Professora: Porquê?

Aluno J: Anda mais depressa.

Professora: Como consegue saber isso através do gráfico?

Aluno J: Então, vê-se que só demora 2h a percorrer os mesmos metros, enquanto que à vinda demora 3h.

Aluno R: Stôra eu fiz com a velocidade média que pede na alínea seguinte e vi que é maior no início.

Professora: Muito bem R. É uma resolução muito pertinente, principalmente quando não e tiverem a percorrer a mesma distância.

Aluno D: Stôra, eu disse que era por a reta ser mais inclinada no início! Também 'tá certo?

Professora: Exatamente D.! E da influência da inclinação da reta, vamos falar mais à frente.

Em relação à determinação da velocidade média a maioria dos alunos utilizou os conhecimentos da disciplina de Físico-Química enquanto apenas um grupo recorreu à regra de três simples.

Na última alínea, a maioria dos alunos manifestou algumas dúvidas, questionando a professora se contemplavam ou não o tempo em que esteve parado e mencionado gráficos do tipo dos seguintes:

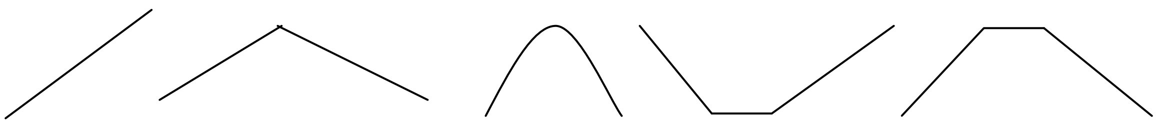


Figura 19 – Exemplos de gráficos propostos pelos alunos na alínea 1.2. da tarefa 1 da ficha sobre funções.

Facilmente abandonaram o primeiro gráfico, no entanto, necessitaram de ajuda para considerarem a distância constante quando o indivíduo esteve parado. A professora solicitou a justificação do grupo que indicou o 4.º gráfico, tendo chegado à conclusão que este poderia representar a distância à casa do amigo e não à casa de partida.

Os alunos foram alertados para a existência de três gráficos que representavam três variáveis dependentes diferentes, no entanto, de acordo com um mesmo percurso.

Em relação à tarefa 2, os alunos não manifestaram quaisquer dificuldades, decerto por já estarem familiarizados com a resolução de tarefas envolvendo proporcionalidade direta no 7.º ano.

Na alínea d), os alunos identificaram facilmente que "o consumo é sempre o dobro do custo" ou "o consumo: 2 é o custo", o que lhes permitiu na alínea g) escrever as expressões:

Figura 20 – Exemplo de resolução da alínea 1.1. g) da tarefa 2 da ficha sobre funções.

Também o valor de k foi rapidamente associado, no contexto do problema, ao "custo da água por cada metro cúbico", ao que "não varia" ou matematicamente à "constante de proporcionalidade direta".

Após a determinação da expressão analítica, e recorrendo ao *Geogebra*, foi feita a confirmação da representação gráfica realizada anteriormente. Aqui os alunos questionaram o porquê do gráfico obtido não ser igual ao que construíram, facto que foi explicado devido à janela de visualização ser diferente em cada um.

De seguida foi realizado um resumo da função linear, ou de proporcionalidade direta, algébrica e graficamente.

Após terem trabalhado com uma situação onde existe uma relação de proporcionalidade direta entre as variáveis, os alunos facilmente verificaram que na segunda situação essa relação deixaria de existir devido a uma taxa fixa.

Após a leitura da segunda parte do enunciado, uma das alunas precipitando-se no seu raciocínio afirmou que:

> Aluna R: Stôra, então mas assim é melhor viver em Lisboa porque pago menos por cada m3 de água!

Aluna I: Não podes ter a certeza disso! Não vês que também pagas o aluguer! É bom no início mas não sabes se é para sempre.
Professora: Muito bem I. Iremos discutir essa questão no fim da tarefa, ok?

Em relação à determinação do consumo mensal dado o custo, os alunos, não tendo a expressão algébrica, utilizaram um raciocínio em que utilizavam as operações inversas, dando-lhes sentido no contexto do problema, tal como ilustra o seguinte diálogo:

Aluno J: Se tirarmos 15 aos 16 euros, ficamos com o que gastámos.
Professora: Mas o que gastou em euros ou em m3?
Aluno J: Em euros, mas depois basta dividir por 0,1, que dá…. J. hesita
Professora para a turma: Dividir por 0,1 é o mesmo que…
Aluno R: Multiplicar por 10.
Aluna R: Xi! Já não me lembrava disso, mas é melhor ir à calculadora para não me enganar.
Aluno J: …dá 10, stôra! Eu tinha aqui escrito, só não me lembrava….
Aluno D: Stôra assim continua a ganhar Bragança!
Professora: Porquê?
Aluno D: Então em Lisboa pagamos 16 euros e em Bragança só 5.

Em virtude desta tarefa utilizar linguagem natural de fácil interpretação, os alunos encontraram a expressão algébrica sem qualquer dificuldade, explicando os seus parâmetros no contexto do problema.

Em virtude de agora terem a expressão algébrica, todos os alunos resolveram a alínea g) recorrendo à análise gráfica das duas funções, identificando corretamente o ponto de intersecção das retas como ponto de interesse. Uma das alunas, perguntando se no teste podia utilizar o *Geogebra,* quis saber como se resolveria a alínea algebricamente. No início os alunos mostraram-se reticentes pelo facto de o y desaparecer, aquando da igualdade entre as duas expressões.

Na última alínea, demostrando percebê-la corretamente, o D. interveio de forma pertinente, tal como ilustra o seguinte diálogo:

Aluno D: Stôra, então no 37,5 é igual. (referindo-se à abcissa do ponto de intersecção das retas)
Professora: Sim, é indiferente, pois pagará o mesmo, por isso é que dizemos a partir de 37,5 m3 é preferível viver em Lisboa, enquanto que antes é melhor Bragança.
Aluno J: É como ser neutro.

Nesta tarefa os alunos não manifestaram dúvidas em distinguir situações de proporcionalidade direta, ou não, facto que se poderá dever à fácil interpretação do enunciado, onde as informações matemáticas estarem expressas em linguagem natural.

Não houve tempo para fazer um resumo da função afim, tal como previsto inicialmente.

Segunda aula (06/02/13)

Duração: 90 minutos

Sumário: Variação da ordenada na origem e do declive da função afim (tarefa de investigação).

A aula foi iniciada com um resumo da noção de função afim. Ao longo do resumo sobre a noção de função afim (y=kx+b) os alunos, baseando-se na tarefa da aula anterior, associaram o valor do k ao que "vai variando, são os 10 cêntimos", de acordo com o consumido, e ao valor de b ao que "é fixo, os 15 euros do aluguer do contador".

Após confronto entre as expressões y=0,5x e y=0,1x+15, os alunos associaram a primeira à função linear e a segunda à função afim diferente da linear. Entretanto surgiu a seguinte discussão:

> Aluna M: Então uma linear é afim?
> Professora (dirigindo-se para toda a turma): Uma função linear é uma afim?
> Aluna B: Sim, a linear é quando o b é zero e quando não é linear o b é mais do que zero…
> Aluno J: Ou menos, é diferente de zero…
> Professora: A função linear é como se fosse uma pequenina dentro da afim, é um caso particular.
> Aluna M: Stôra, então qual é a diferença?
> Professora (dirigindo-se para toda a turma): Então qual é a diferença?
> Aluna B: A linear passa pela origem.
> Aluno J: A linear tem proporcionalidade direta.
> Aluna B: Uma não tem avanço outra tem!
> Professora: Exatamente, graficamente a linear passa pela origem e a outra não, e algebricamente na linear o b é zero e na outra é diferente de zero, ok?

Apesar de ter referido a função linear como um caso particular da função afim, após a transcrição deste diálogo, apercebi-me que, depois do meu último comentário, poderá não ter ficado esclarecido que a diferença discutida referia-se às funções linear versus afim não linear. Esta minha intervenção final deveria ter sido mais cuidada para não criar confusão no raciocínio que os alunos estavam a expor.

Antes de iniciar a tarefa referi que agora iríamos investigar a influência dos valores k e b da expressão algébrica, recorrendo à análise gráfica através do *Geogebra*.

Na interpretação do valor da constante os alunos conseguiram identificar que retas paralelas correspondiam a expressões com o mesmo valor do declive, tal como ilustram as seguintes respostas:

Figura 21 – Exemplo de resolução das alíneas 1.2. e 1.3 da tarefa 3 do manual.

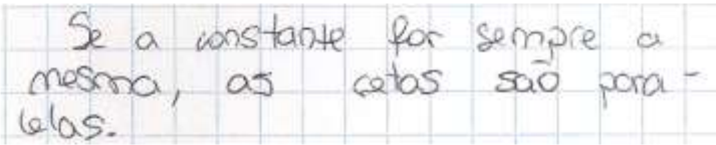


Figura 22 – Exemplo de resolução da alínea 1.3. da tarefa 3 do manual.

No entanto, alguns alunos ainda andaram um pouco perdidos identificando como aspetos comum: o y, o x e o 2. Com efeito tive que intervir e encaminhá-los para a análise dos únicos valores que podiam sofrer alterações na expressão genérica da função afim, y=kx+b.

Em relação à interpretação do valor da ordenada na origem, notou-se que alguns alunos, em contextos puramente matemáticos, não conseguiam identificar corretamente as coordenadas dos pontos de intersecção com o eixo Oy, indicando apenas a ordenada, ou conjuntamente a ordenada da interseção com o eixo Oy e a abcissa da interseção com o eixo Ox. No entanto, alguns chegaram a conclusões corretas:

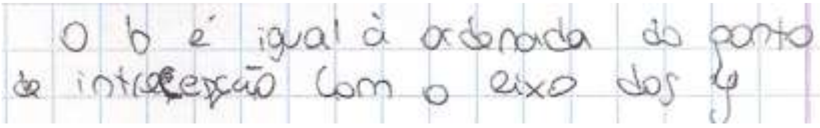


Figura 23 – Exemplo de resolução da alínea 1.5. da tarefa 3 do manual.

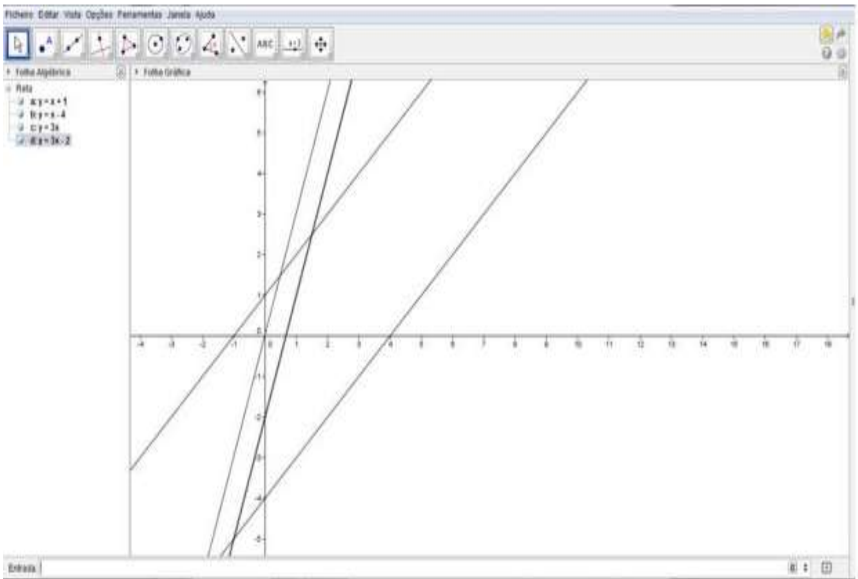
Figura 24 – Exemplo de resolução da alínea 1.5. da tarefa 3 do manual.

No decurso da discussão um aluno perguntou como se determinava o valor de k e uma das alunas chegou a interferir afirmando que agora seria “o sítio de interseção com o eixo do x”. Esta afirmação foi facilmente recusada pela aluna quando confrontada com a análise gráfica das funções que estavam a ser utilizadas. A explicação do processo de determinação do declive foi encaminhado para as próximas aulas, e frisei que agora apenas queríamos fazer uma análise de como este parâmetro influenciava o gráfico.

Nas justificações escritas e orais verificou-se que os alunos ainda fazem muitas confusões entre as noções de ordenada e coordenada e não se exprimem de forma matematicamente correta, por exemplo, afirmando que “b é o sítio onde toca o eixo y”.

Na questão seguinte, os alunos já não manifestaram dificuldades, agrupando funções com as mesmas caraterísticas gráficas com funções com as mesmas caraterísticas algébricas:

2.1.



2.2. y=3x e y=3x-2 } são paralelas y=x+1 e y=x-4 } são paralelas

2.3. y=3x e y=x

Figura 25 – Exemplo de resolução das alíneas 2.1., 2.2 e 2.3 da tarefa 3 do manual

Um par refere também, relativamente à questão 2.3 que “têm o mesmo k”, justificando “as funções que agrupei são paralelas enquanto que as restantes são concorrentes”.

No que diz respeito à análise do efeito do valor de k na variação da função afim, os alunos conseguiram rapidamente verificar que a inclinação das retas depende do valor do k na expressão algébrica, enunciando que: “a reta cresce quando a constante é positiva e desce quando é negativa e não varia quando é zero”. Para além disso também foram capazes de concluir que quanto maior é a constante maior é a inclinação do gráfico, o que se pode constatar no seguinte diálogo:

Aluno D: Quanto maior o k, mais próxima da vertical.

Professora: Será sempre assim? E quando temos as retas de equação y=-x+1 e y=-3x+1? Também tiramos a mesma conclusão?

Aluno D: Sim! O -3x é maior do que –x e a reta está mais na vertical.

Aluno J: Não stôra, aí é ao contrário, porque -3 é menor que -1.

Aluno D: Pois o que eu queria dizer era só o número positivo.

Professora: Deve ser é o número sem o sinal!

Aluno J: Stôra, podemos dizer o valor absoluto e aí já ‘tá certo.

Aluno D: Stôra, também podemos ver o ângulo da reta, quanto maior o k maior é o ângulo da reta.

Professora: O k não, o valor absoluto do k, ou então tira conclusões diferentes dependendo do k ser positivo ou negativo. Que ângulo é esse que está a pensar?

Aluno D.: Com o eixo do x, stôra!

Professora: Venha ao quadro indicar!

Para minha surpresa, o aluno indica o ângulo formado entre a parte positiva do eixo das abcissas e a reta. De seguida aproveitei para identificar esse ângulo com a noção de inclinação da reta.

Aluno D: Então sempre que é y =… é sempre horizontal ou inclinada.

Professora: Sim, se estiver na forma y=kx+b.

Aluno D: Então e vertical? Como é?

Professora: Muito bem, uma questão muito pertinente.

Desenhando no quadro a reta vertical de equação x=5, a professora questiona os alunos:

Professora: Vimos na horizontal que era sempre y igual a um número porque o k era 0. Então e agora o que acontece?

Alunos observam a figura sem surgirem respostas.

Professora: O que é que é sempre constante?

Aluno J: É o x, é sempre 5.

Aluno R: Agora é sempre x igual a um número.

Professora: Exato.

Aluno R: Também se chama função afim, stôra?

Professora: Agora não, se repararem nem sequer é função porque o objeto x=5 tem várias imagens, e só poderia ter uma, como vocês viram no 7.º ano.

Esta aula correu de forma bastante positiva, como se constata pelo facto de os alunos terem conseguido levantar questões sobre diversos tipos de variações, quer gráfica quer algebricamente. Por outro lado, os alunos estiveram atentos à discriminação de todos os casos possíveis para sustentar as várias conclusões, evidenciando assim que a capacidade de generalização tem como base os raciocínios construídos a partir de casos particulares.

Terceira e quarta aulas (08/02/13 e 15/02/13)

Duração: 45 + 45 minutos

Sumário: Resolução de exercícios do manual sobre função afim.

Estas duas aulas surgiram num momento conveniente, uma vez que foram os próprios alunos que, não sabendo da planificação das aulas, sentiram a necessidade de uma aula de resumo e aplicação das aprendizagens. Nesta aula foi possível consolidar os conhecimentos relacionados com a função afim e enfatizar o trabalho com simbolismo algébrico.

Como era de esperar os alunos manifestaram algumas dificuldades na interpretação da notação algébrica própria das funções, nomeadamente "f(…)=y" e "f(x)=…" e mais facilidade em trabalhar com representações gráficas do que algébricas.

Quinta aula (19/02/13)

Duração: 90 minutos

Sumário: Correção do tpc. Determinação do declive e da ordenada na origem da função afim (continuação da resolução da ficha de trabalho sobre funções).

No início da correção do tpc, tarefa 3, os alunos, recorrendo à tabela e utilizando os valores das duas primeiras colunas, conseguiram determinar o valor do ordenado e o valor do prémio por carro vendido, associando diretamente esses valores, respetivamente, ao b e ao k da função afim devido às suas caraterísticas, um por ser um valor fixo e o outro por estar dependente do número de carros vendidos, que seria variável. Assim sendo, para determinar o valor do prémio, os alunos fizeram o seguinte raciocínio:

Aluna B: Fiz 2500 menos 2000 deu 500 e depois dividi por 2, que foi dar 250.

Professora: Então explique lá aos seus colegas o que são os 500 e porque dividiu por 2.

Aluna B: 500 foi o que ele recebeu na venda de 3 a 5 carros, ou seja, 2 carros, por isso é que dividi por 2 para saber quanto fica por cada carro.

Após este processo expliquei-lhes que tinham arranjado uma estratégia para determinar o valor do k, fazendo no quadro um resumo deste processo. De seguida um dos alunos questionou se daria o mesmo resultado utilizando outros valores da tabela. Sugerindo-lhe que repetisse o mesmo processo, o aluno confirmou que o raciocínio era igual.

Para determinar o valor do ordenado fixo, a aluna R. explicou: "Agora como já temos o preço do que ganha por cada carro, o prémio de 3 carros é 3 vezes 250, 750 e depois tirar isso dos 2000, dá 1250 euros".

Após este processo expliquei-lhes que de acordo com este raciocínio se determinava o valor do b. No entanto, o aluno R. rapidamente colocou uma dúvida:

Aluno R: Mas o b não era onde passava no eixo y?

Professora: Sim, e continua a ser, o problema é que nós agora não temos diretamente esse valor, que corresponde ao tal avanço que falámos nas aulas anteriores.

Aluno R: Ah pois! E agora o avanço é o ordenado que ele recebe todos os meses.

Professora: Sim, se reparar esse valor é o que ele ganha à cabeça, quando vende zero carros, ou seja, é o avanço.

Aluno R: Isso funciona mesmo assim nos stands de vendas? Se vender um Renault Clio ou um Porsche é a mesma coisa?

Professora: R. isso dependerá dos stands e dos seus objetivos.

A intervenção deste aluno foi bastante pertinente, mostrando-se interessado em confrontar as situações criadas para a aula de Matemática e a sua adequação à realidade, reforçando a ideia de que devemos ter cuidado com a autenticidade das situações que escolhemos para serem exploradas para que os alunos sintam a utilidade da Matemática.

Em relação à questão da proporcionalidade direta, uma das alunas disse que tinha respondido que existia porque a constante era 250. Esta aluna ainda não tinha conseguido interiorizar a noção de proporcionalidade direta algebricamente, pelo que foi necessário esclarecer a diferença entre a constante de proporcionalidade direta e a constante que se obtém quando não há proporcionalidade direta. Alguns dos colegas afirmaram que para verificar bastava fazer y/x, ou seja, neste contexto seria o quociente entre o valor recebido e o número de carros, mas não conseguiram justificar porquê.

Um dos alunos um pouco confuso, questiona a professora em relação a este assunto: “É verdade stôra, porque é que o ano passado só precisávamos de um ponto e dividíamos o y pelo x e este ano precisamos de dois?”.

Assim sendo, esclareci que a diferença residia no facto de uma situação de proporcionalidade direta não termos de contemplar o avanço, o tal valor do b. Para melhor elucidar os alunos, fiz um esquema gráfico de duas situações onde estava presente a proporcionalidade direta e outra não, e, através das razões entre as alturas e as bases de triângulos formados recorrendo a dois pontos, expliquei graficamente o processo que têm estado a utilizar nas várias tarefas.

Nas alíneas seguintes a maioria dos alunos continuou a evitar a utilização da expressão algébrica, recorrendo ao significado dos valores do k e b calculados anteriormente e aos valores da tabela. No entanto, foram discutidas todas as estratégias apresentadas, nomeadamente a algébrica.

Por fim, um dos alunos questionou se ao fazer o gráfico poderia ou não unir os pontos dados pela tabela, pergunta que permitiu a discussão do tipo de gráficos a utilizar quando temos variáveis contínuas ou discretas.

Em relação à tarefa 4 todos os alunos conseguem associar os percursos descritos graficamente aos respetivos indivíduos através do avanço inicial de 200m.

De seguida, todos os alunos determinam corretamente a constante de proporcionalidade direta a partir dos dados do gráfico, no entanto, na situação em que não existe proporcionalidade direta um dos grupos não conseguiu determiná-la em virtude de ter utilizado a regra de três simples de forma incorreta, não considerando o avanço inicial.

Para determinar a velocidade média do percurso surgiram algumas resoluções corretas utilizando o raciocínio da regra de três simples, tal como a que se segue:

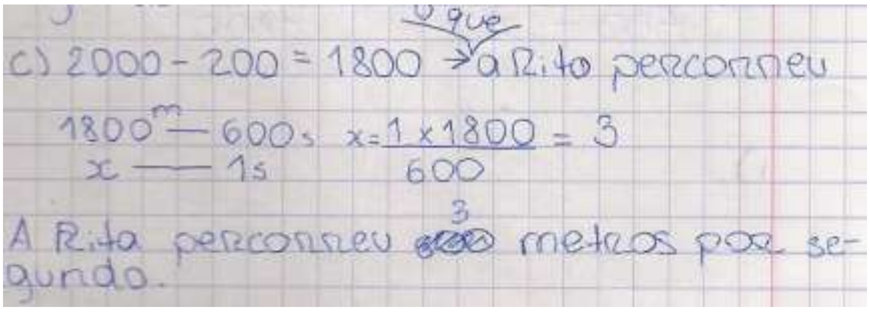


Figura 26 – Exemplo de resolução da alínea c) da tarefa 4 da ficha sobre funções.

No entanto, a maioria dos alunos não utilizou a regra de três simples, meramente dividindo os metros percorridos pelo tempo gasto, permitindo-lhes compreender o modo como vai evoluindo o número de metros, por cada segundo.

De acordo com as questões anteriores, todos os alunos indicaram corretamente as expressões algébricas, no entanto, apenas uma minoria as utilizou para responder às questões seguintes privilegiando estratégias com recurso a raciocínios inversos e pela ordem correta, tal como ilustra o seguinte raciocínio:

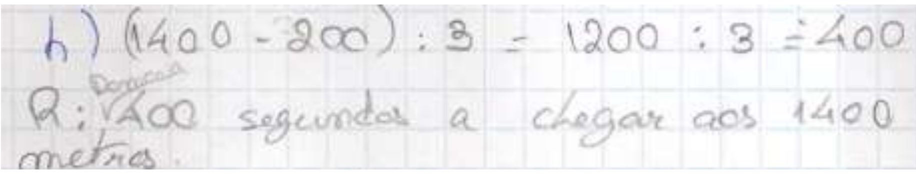


Figura 27 – Exemplo de resolução da alínea h) da tarefa 4 da ficha sobre funções.

De frisar que apesar que, apesar de raramente recorrerem à expressão algébrica, a maioria dos alunos, através dos raciocínios utilizados, evidencia ter entendido de forma correta a relação entre as variáveis distância e tempo.

Na última questão, apenas um dos grupos recorre à igualdade das expressões algébricas:

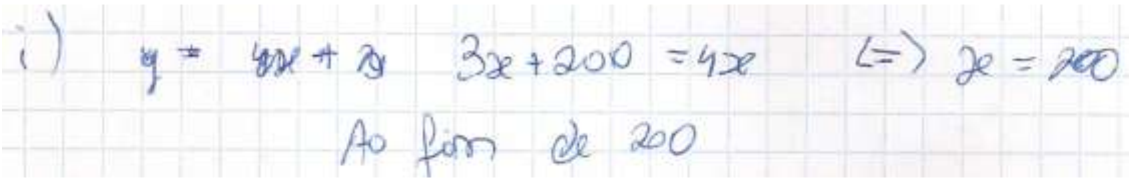


Figura 28 – Exemplo de resolução da alínea i) da tarefa 4 da ficha sobre funções.

Os restantes grupos, face à incapacidade em resolver a questão recorrendo a um raciocínio algébrico, consideram suficientes os dados que retiram do gráfico e interpretam corretamente o ponto de interseção das duas retas.

Nesta aula constata-se, mais uma vez, a necessidade de introduzir e explorar as noções de declive, de ordenada na origem e de expressão algébrica, a partir de situações contextualizadas, onde os alunos possam colocar questões de acordo com os significados atribuídos nos respetivos contextos e fazendo um paralelismo com processos já conhecidos de outros anos.

Sexta aula (20/02/13)

Duração: 90 minutos

Sumário: Função afim (conclusão da resolução da ficha de trabalho).Mini ficha.

Nesta aula, os alunos tiveram mais uma oportunidade de interpretar a expressão algébrica num contexto agora geométrico e aqui, ao contrário das tarefas anteriores, a maioria utilizou-a para resolver as questões relativas à determinação de objetos e imagens. Considero que o recurso à expressão deve desenvolver-se nos alunos de forma progressiva e que mesmo que não seja uma estratégia que todos adotem, estes devem estar sempre em contacto com a mesma.

4. Metodologia

Este capítulo procura descrever a metodologia utilizada ao longo do estudo, estando organizado em quatro secções: as opções metodológicas realizadas; a caracterização dos participantes no estudo; a apresentação das técnicas e dos instrumentos utilizados na recolha de dados e a descrição do método de análise dos dados.

4.1. Opções metodológicas

O presente trabalho apresenta uma natureza qualitativa, baseada na recolha de dados descritivos recolhidos na sala de aula, ambiente natural dos alunos, e em entrevistas realizadas posteriormente, a partir das quais serão analisados os processos de raciocínio dos alunos na tentativa de perceber as suas experiências.

Qualquer professor de Matemática que queira contribuir para o processo de aprendizagem dos seus alunos, deve preocupar-se com as formas de ensino que melhor se adequam a esse processo. Para tal, deverá analisar o processo de construção das aprendizagens dos alunos, com vista a compreender o modo como estes agem e raciocinam. De acordo com esta ideia, a escolha da minha prática letiva para realizar este estudo deveu-se, por um lado, à necessidade de compreender os raciocínios dos meus alunos e de perceber a influência da exploração das tarefas propostas na sua aprendizagem num ambiente natural e, por outro lado, à facilidade de recolha de dados, dentro do meu horário profissional.

Este relatório centra-se numa unidade de ensino desenvolvida no 2.º período e através da análise dos raciocínios de três estudos de caso referentes a alunos com desempenhos académicos distintos.

4.2. Participantes

O presente estudo foi realizado com alunos de uma turma do 8.º ano de escolaridade do Ensino Básico, da qual sou professora de Matemática. Para seleção dos casos que vieram a participar no estudo, foram tidos em conta alunos que, por um lado, participassem nas aulas por vontade própria e evidenciassem alguma compreensão das mesmas e, por outro lado, que caraterizassem os elementos da turma ao nível da sua variedade de aproveitamento.

Assim sendo, escolhi três alunos: o Ricardo por revelar um desempenho muito bom; a Rosa por ter um desempenho oscilatório entre o Satisfaz e o Bom e, de entre os alunos que revelaram um desempenho mais fraco, o Dinis, por se vir a ter revelado um bom comunicador.

O Ricardo é um aluno de nível cinco na disciplina de Matemática, revela capacidade crítica, é participativo e empenhado, gosta de explorar as tarefas propostas, é organizado no seu raciocínio e autónomo no trabalho realizado quer nas aulas, quer em casa. A Matemática é a sua disciplina preferida e gosta de aprender a disciplina com compreensão dos significados.

A Rosa é uma aluna de nível quatro, revela um bom empenho nas aulas mas é um pouco confusa no seu raciocínio. Gosta de Matemática, mas tem preferência por ter sucesso na disciplina recorrendo a procedimentos mecanizados, revelando algumas dificuldades em questões exploratórias.

O Dinis é um aluno de nível dois, repetente, mas que revela boa participação nas aulas, colocando questões pertinentes, no entanto, é pouco trabalhador, desorganizado no seu estudo e começa a revelar falta de pré-requisitos.

4.3. Procedimentos e instrumentos de recolha de dados

As técnicas de recolha de dados utilizadas neste estudo foram a observação direta, a análise documental e a entrevista.

Relativamente à observação direta das aulas, o registo das mesmas foi feito com recurso a um videogravador, o que permitiu manter intacta a informação recolhida, ajudando na descrição detalhada de diálogos referentes a episódios de sala de aula pertinentes. Paralelamente às gravações foram tiradas notas, ao longo das aulas, e logo após as mesmas, nomeadamente, apontamento de comentários e de raciocínios dos alunos, que auxiliaram na descrição dos acontecimentos e intervenções pertinentes que ocorreram.

Neste estudo foram analisados vários tipos de documentos: as produções escritas dos alunos na aula e nas entrevistas, com o objetivo de compreender os processos que utilizam e as dificuldades que apresentam nas tarefas propostas e os documentos que contemplam a caracterização do contexto escolar, nomeadamente relatórios relativos à escola e documentos relativos ao percurso e à caraterização dos alunos da turma.

Relativamente às entrevistas realizadas individualmente aos três alunos, estas foram videogravadas e decorreram fora do tempo das atividades letivas, durante um período de aproximadamente 40 minutos. As entrevistas realizaram-se após a concretização da unidade de ensino e incidiram em quatro tarefas de exploração sobre os tópicos das sequências e funções (anexos 12). Estas entrevistas permitiram a compreensão mais detalhada das estratégias adotadas pelos alunos e das suas dificuldades através da oportunidade de explicação detalhada dos seus raciocínios. A minha intervenção nas entrevistas foi de constante interrogação mas assumindo um papel neutro procurando não influenciar o raciocínio dos alunos.

4.4. Análise de dados

Este estudo foi realizado em três fases principais: delineamento do estudo, nomeadamente dos seus objetivos e de aspetos a focar, de outros estudos com possíveis contributos para o presente estudo; planificação e implementação de uma unidade de ensino que permitisse responder às questões colocadas inicialmente e, por fim, a fase de análise dos dados, onde se refletisse sobre os processos que os alunos utilizam no processo de generalização.

Uma primeira análise de dados foi realizada aquando da descrição da concretização das aulas onde, tendo em conta o objetivo do estudo, foram evidenciados os aspetos mais significativos em relação à capacidade de generalização. Posteriormente, os resultados obtidos nas entrevistas foram confrontados com outros estudos referentes ao processo de generalização, às estratégias adotadas e às dificuldades apresentadas pelos alunos.

5. Análise de dados

Neste capítulo será analisado o processo de generalização de três alunos de níveis de desempenho diferentes na disciplina de Matemática, a Rosa, o Dinis e o Ricardo, ao longo da realização de quatro tarefas de natureza exploratória apresentadas visual, numérica e graficamente (anexo 12), propostas em entrevistas individuais. Por fim será realizada uma análise das estratégias e dificuldades apresentadas pelos alunos nestas tarefas.

5.1. Análise do processo de generalização dos alunos

A análise dos raciocínios dos alunos, durante a realização das tarefas propostas na entrevista, foi desenvolvida com base na taxonomia de Ellis (2007a).

5.1.1 Tarefa 1 – Sequências pictóricas

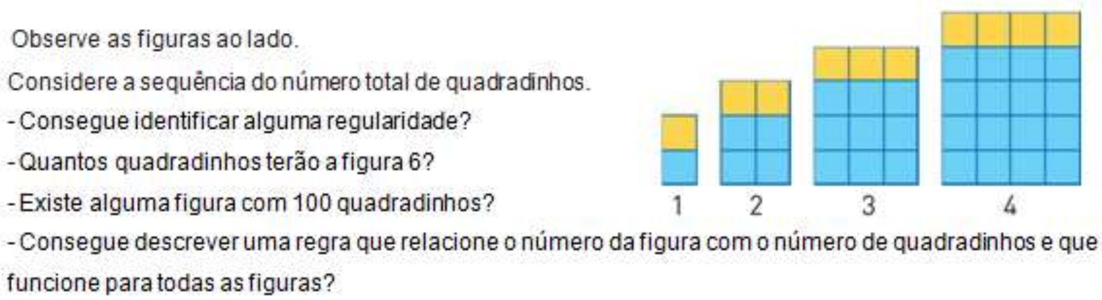


Figura 29 – Enunciado da tarefa 1 proposta na entrevista

Nesta tarefa a Rosa *procurou* várias *relações* quer entre os elementos da figura, ao afirmar "é sempre os amarelos vezes a quantidade de paredes que há assim…[indicando no desenho as linhas]", quer entre propriedades da figura e o número da mesma, referindo, "o número de cubos [referindo-se aos quadradinhos] amarelos é igual ao número da figura" e também que "o número de linhas azuis é sempre igual ao número daquilo [referindo-se à ordem da sequência] ". Aqui, a ação de generalização da aluna concentra-se na *procura de relações* entre as quantidades, nomeadamente entre o número da figura (ordem da sequência) e o número de quadradinhos (termo da sequência) ou outras propriedades da figura. Assim, não se foca apenas em padrões visuais ou numéricos, mas encaminha a exploração da sequência de forma a construir uma generalização verbal das relações que posteriormente transformará em algébrica, como veremos mais à frente.

A Rosa, após encontrar as várias regularidades na figura, sentiu rapidamente a necessidade de encontrar uma *regra geral* que lhe permitisse responder diretamente a todas as questões seguintes. Assim sendo, referiu que “multiplicamos os amarelos pela quantidade de paredes que há (…) as paredes são estas assim [desenhando retas horizontais], as linhas” e de seguida escreveu:

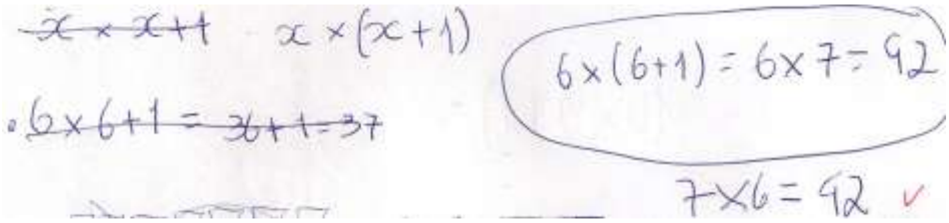


Figura 30 – Exemplo de resolução da primeira alínea da tarefa 1 da entrevista

Tal como na descrição das regularidades da sequência, aqui nota-se a preocupação da aluna em tentar estabelecer relações entre o número de quadrados da figura (termos) e o número da mesma (ordem), no entanto, na sua explicação verbal, continua a associar as incógnitas da expressão a caraterísticas da figura.

Na segunda questão da mesma tarefa, através das relações visuais que identificou anteriormente, a aluna desenha a 6.ª figura e de seguida, através de *operações matemáticas*, determina um novo termo da sequência.

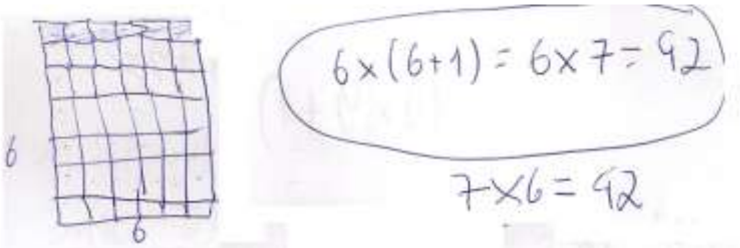


Figura 31 – Exemplo de resolução da segunda alínea da tarefa 1 da entrevista

Para *procurar* se existe alguma figura com 100 quadradinhos, a aluna utilizando a regra geral equaciona esta situação e tenta resolvê-la, tal como ilustra o que se segue:

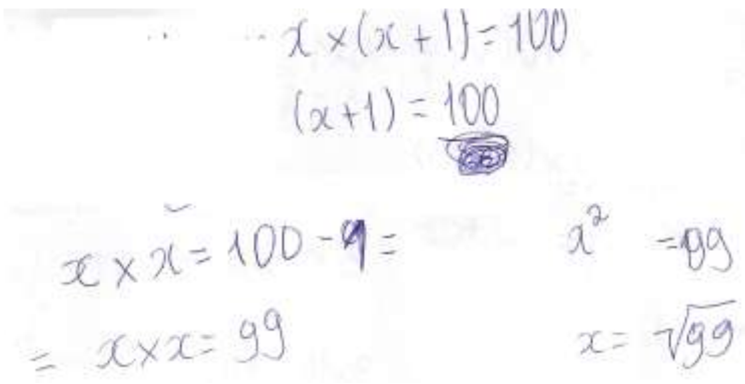


Figura 32 – Exemplo de resolução da terceira alínea da tarefa 1 da entrevista

Inicialmente a aluna é confrontada com a impossibilidade de conseguir dividir por x, riscando essa divisão e afirmando “não vai ser assim”. De seguida, aplica incorretamente a propriedade distributiva e resolve a equação obtida concluindo que não existe nenhuma figura com 100 quadradinhos através da seguinte justificação: “não há porque x.x=99 (…) aqui não posso fazer uma figura (…) raiz de noventa e nove não há. Hum… Não estou convencida”. Ou seja, a aluna apercebe-se que a expressão que obtém não corresponde à que tinha identificado para a sequência: x.(x+1). Verifica-se, portanto, que a aluna tenta aplicar um *procedimento* para a resolução desta equação, mas sem sucesso, uma vez que aplica regras sem significado. No entanto, verifica-se que tem uma boa perceção da regra geral dos termos da sequência.

O Dinis começa a análise da sequência *procurando* um *padrão* na construção da mesma, afirmando que “vai-se sempre acrescentado um [quadrado] às amarelas e uma linha aos azuis”. De seguida, rapidamente começa a fazer associações entre características de cada figura e o número da mesma, estabelecendo várias *relações*: “[os amarelos] vão sempre sendo sempre iguais à parte de baixo (...) ao número da sequência e também ao número de azuis aqui em baixo [referindo-se à linha azul inferior]”; “os azuis é um vezes um, dois vezes dois, três vezes três… a parte azul é igual ao quadrado da parte amarela (…) ao quadrado do número aqui em baixo”. Nota-se aqui que o Dinis vai para além da procura de padrões, *procurando* várias *relações* baseadas nas caraterísticas da figura.

Na segunda questão da mesma tarefa, o aluno, para gerar um novo termo da sequência, realiza algumas *operações matemáticas* baseadas nas relações que encontrou na exploração do padrão, *estendendo* assim a sua sequência com mais um exemplo.

$6^2 = 36$ mais 6 que é a parte amarela

Figura 33 – Exemplo de resolução da segunda alínea da tarefa 1 da entrevista

Na tentativa de *procurar um resultado* da sequência, o 100, o aluno recorre a processos de experimentação, utilizando raciocínios inversos para fundamentar as suas justificações. Assim sendo, o aluno afirma "raiz de cem é 10, com o 10 não dá, … já dá mais… e com o 9? Nove vezes nove oitenta e um e mais nove que são os amarelos… dá noventa! Logo não há nenhum!" e de seguida escreve:

Não pois a raiz quadrada de 100 é 10 e o numero mais próximo do 10 é o nove que dá 90 quadrados.

Figura 34 – Exemplo de resolução da terceira alínea da tarefa 1 da entrevista

Aqui nota-se alguma dificuldade em explicar o seu raciocínio de forma coerente, principalmente através de uma justificação escrita.

Quando confrontado com a necessidade de encontrar uma *regra geral*, o Dinis começa por afirmar que "a regra é aquilo do x" e escreve:

$$x^2 + x$$

Figura 35 – Exemplo de resolução da quarta alínea da tarefa 1 da entrevista

Questionado sobre o significado do que escreveu, afirma "os azuis mais os amarelos (…) o x é o número da sequência, da figura."

Nesta tarefa o Ricardo, *procurando padrões* na figura, começa por referir que "acrescento sempre uma coluna e uma fila" e "acrescento sempre um quadrado amarelo e …", mas rapidamente se concentra na procura da expressão algébrica, raciocínio que faz de cabeça e ao tentar explicar como aumenta o número de quadrados amarelos e azuis, rapidamente sente necessidade de descrever a sequência através de uma *regra geral* para generalizar essa variação. Com efeito, fazendo algumas confirmações mentalmente, apresenta as expressões que se seguem:

$$[n \times (n+1)] - n^2 \qquad [n \times (n+1)] - n$$

Figura 36 – Exemplo de resolução da primeira alínea da tarefa 1 da entrevista

Quando confrontado com a explicação das mesmas, refere que para o número de quadrados amarelos “faço os quadrados do retângulo todo e tiro os do quadrado azul” e para o número de quadrados azuis “ é o mesmo mas agora tiro os amarelos”.

Quando necessitou do número total de quadradinhos de cada figura, o aluno não utilizou a soma entre as expressões encontradas anteriormente e escreveu uma nova expressão:

$$n \times (n+1)$$

Figura 37 – Exemplo de resolução da primeira alínea da tarefa 1 da entrevista

Quando solicitada a explicação deste raciocínio, o Ricardo refere “este [n] é o número de quadradinhos da base e este [n+1] é o número de quadradinhos da altura”.

Na segunda questão, o aluno, para determinar um novo termo da sequência, realiza *operações matemáticas* “seis vezes sete igual a quarenta e dois”, *estendendo* assim a sua sequência com mais um exemplo. Quando confrontado com a necessidade de uma justificação do seu raciocínio, o aluno escreve:

42 quadrados $\rightarrow$ usei a expressão $n \times (n+1)$

Figura 38 – Exemplo de resolução da segunda alínea da tarefa 1 da entrevista

Este aluno reconhece as potencialidades da expressão algébrica e considera suficiente a sua utilização para justificar os seus raciocínios.

De seguida, para tentar *procurar* se existe alguma figura com 100 quadrados, o aluno equaciona a situação:

$$n \times (n+1) = 100$$

Figura 39 – Exemplo de tentativa de resolução da terceira alínea da tarefa 1 da entrevista

Ao tentar resolvê-la, e pensando que não estava a par da matéria, o aluno afirma "[risos]… ainda não sei muito bem como é que se faz estas equações", o que seria de esperar uma vez que à data os alunos apenas sabiam resolver equações incompletas ou completas que envolvessem diretamente o caso notável do quadrado da soma. Assim sendo, quando confrontado com a incapacidade de a resolver, tenta chegar ao resultado por experimentação afirmando: "estava a pensar fazer dez vezes dez, mas como é um retângulo tem um a mais na altura e não há nenhum que assim dê 100". Assim, mais uma vez as propriedades visuais da figura, auxiliam a justificação do raciocínio do aluno.

5.1.2. Tarefa 2 – Sequências numéricas

Observe a sequência de números da tabela.
- Consegue identificar alguma regularidade?
- Qual o valor da sequência na 7ª linha?
- Existe alguma linha com o valor da sequência zero?
- Consegue descrever uma regra que relacione o número da linha com o valor da sequência que funcione sempre?

Número da linha	Valor da sequência
1	30
2	27
3	24
4	21
5	18

Figura 40 – Enunciado da tarefa 2 proposta na entrevista

Numa fase preliminar da análise das sequências a Rosa tenta *procurar padrões* que caraterizem a construção da sequência. Neste caso, a aluna encontra, nos elementos da segunda coluna da tabela, uma diferença invariante de três unidades entre cada termo da sequência e identifica os múltiplos de três, afirmando: "vai descendo 3, é a tabuada do 3 para baixo (…) até chegar aos números negativos".

Após detetar que os termos da sequência correspondem à tabuada do três invertida, a aluna, *continuando* a construir a sequência através da repetição deste padrão, encontra o termo de ordem sete. Para tal verbaliza "três vezes dez, três vezes nove, (…) três vezes quatro igual a doze". Para determinar o termo zero a aluna, mais uma vez *continuando* o padrão existente, constrói todos os termos da sequência até chegar à linha onze que corresponde ao termo zero.

A Rosa, na tentativa de *procurar* uma *relação* entre o número da linha e o termo da sequência, chega a alguns raciocínios que ela própria considera incorretos através da confirmação com casos particulares, tais como:

Figura 41 – Exemplo de tentativa de resolução da quarta alínea da tarefa 2 da entrevista

Após algumas experiências a aluna afirma que a *regra geral* será “três vezes dez menos um do *x*” e justifica com o seguinte raciocínio:

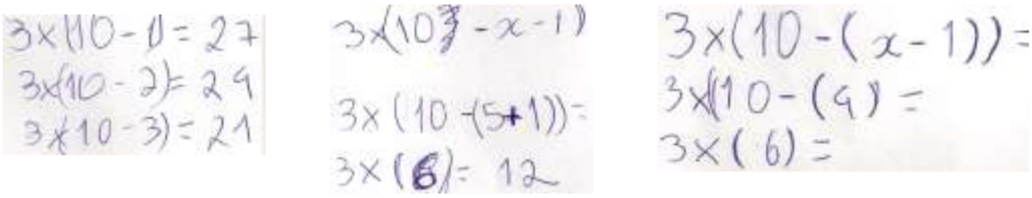


Figura 42 – Exemplo de resolução da quarta alínea da tarefa 1 da entrevista

De referir que a aluna, não segura da sua formalização algébrica, sente a necessidade de confirmar se a regra que encontrou funciona para casos particulares, o que lhe permite facilmente identificar erros cometidos na escrita dos seus raciocínios, tais como a frequente ausência de parêntesis nas expressões.

O Dinis apresenta algumas dificuldades na exploração desta tarefa, apenas conseguindo encontrar regularidades em cada uma das colunas:

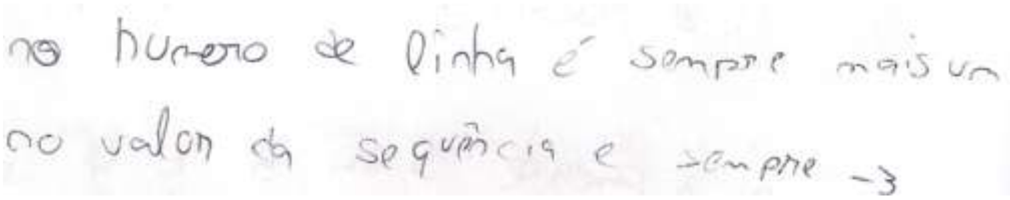


Figura 43 – Exemplo de resolução da primeira alínea da tarefa 2 da entrevista

Através da análise da construção da sequência, o aluno procura uma caraterística repetitiva que seja semelhante a todos termos, *procurando* um *padrão* que os caraterize.

Quando confrontado com a *procura* de alguma *relação* entre o número da linha e o termo da sequência, apenas consegue verificar que quando o número da linha é ímpar, o termo respetivo da sequência é par e abandona a procura de outras relações mais produtivas na construção do termo geral.

Para determinar o que acontece na sétima linha realiza *operações matemáticas*, encontrando um novo termo da sequência, para tal, por ainda faltarem duas linhas até à sétima, o aluno retira o dobro de três ao termo da última linha apresentada, tal como ilustra o que se segue:

Figura 44 – Exemplo de resolução da segunda alínea da tarefa 2 da entrevista

Para *procurar* a existência do *resultado* zero, o aluno, utilizando o padrão que encontrou anteriormente, justifica:

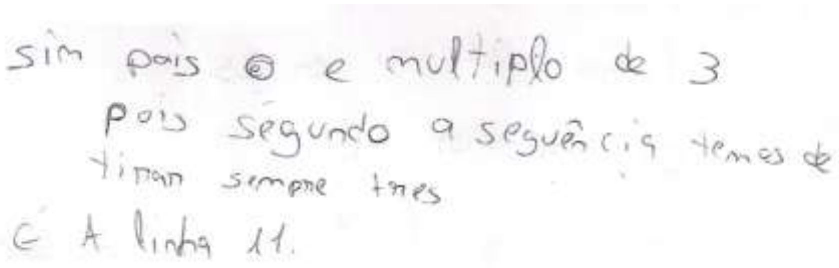


Figura 45 – Exemplo de resolução da terceira alínea da tarefa 2 da entrevista

Tal como a Rosa, para determinar a linha correspondente ao termo zero, o Dinis *continua* o padrão existente e constrói todos os termos da sequência, para tal subtrai sempre três até chegar à linha onze.

No final desta tarefa, o Dinis fixa-se na construção recursiva da sequência e não consegue estabelecer uma relação algébrica entre o número da linha e o termo da sequência, o que o impede de construir uma expressão geral.

O Ricardo também identifica um padrão presente na sequência desta tarefa, afirmando que “subtraem sempre três em cada linha”, mas rapidamente se concentra na procura do termo geral por considerar que o ajuda a responder às questões que surgem na tarefa: “dá-me mais jeito fazer logo a expressão para resolver todas as alíneas”.

Em virtude de o sétimo termo ser próximo dos termos dados, o aluno, à semelhança da Rosa, *continua* a construção da sequência até chegar à linha pretendida.

Para determinar um novo termo da sequência, o aluno recorrendo à expressão algébrica que indicou anteriormente e a um raciocínio mental baseado na experimentação, efetua *operações matemáticas*, tal como ilustra o que se segue:

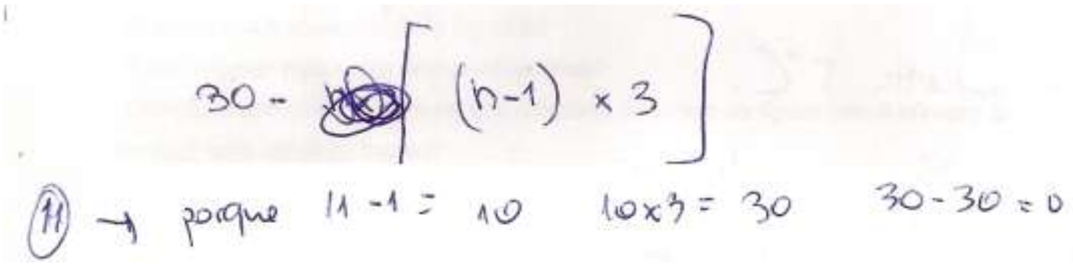


Figura 46 – Exemplo de resolução da segunda alínea da tarefa 2 da entrevista

O Ricardo revela uma preocupação antecipada em determinar a *regra geral* em cada tarefa. Aqui começa por pensar em várias expressões, tendo presente que o número trinta e a multiplicação por três estarão presentes. Como tal, a primeira expressão que encontra é $30 - n \times 3$, que rapidamente abandona através de cálculos mentais e de seguida, escreve:

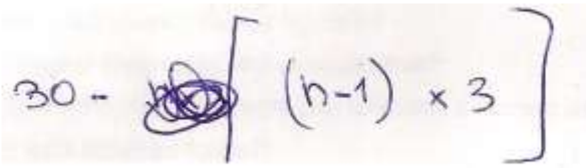


Figura 47 – Exemplo de resolução da quarta alínea da tarefa 2 da entrevista

Dada a rapidez do seu raciocínio, solicitei-lhe uma explicação da expressão. Com efeito, referiu que "30 é onde começamos, $\times 3$ é quantos três subtraímos e $n-1$ é para ficar de acordo com a linha". O aluno revela facilidade em encontrar e descrever uma regra geral, o que indicia um raciocínio algébrico bem desenvolvido.

5.1.3. Tarefa 3 – Funções em tabela

Observe a tabela ao lado.
- Descreva como variam as duas grandezas x e y?
- Qual o valor de y quando x= - 1,5?
- Existe algum valor de y que corresponda a x= 2,75?
- Consegue descrever uma regra que relacione x e y e que funcione para qualquer valor da tabela?

x	y
0	30
0,5	27
1	24
1,5	21
2	18

Figura 48 – Enunciado da tarefa 3 proposta na entrevista

A Rosa rapidamente identifica semelhanças com o raciocínio da tarefa anterior. Assim, *relacionando* as duas *situações*, afirma que "então aqui três vezes dez trinta (…) lá voltamos ao três vezes (…) isto é a mesma coisa, é a tabuada do 3 para baixo outra vez! Mas a outra não é igual! (…) porque aqui há outra regularidade, o x aumenta de 0,5 em 0,5 ”. Desta forma, a aluna encontra *padrões* que caraterizam a construção de cada coluna da tabela.

Para determinar a imagem correspondente ao objeto -1,5, a aluna associa ao objeto +1,5 o valor 7×3 e refere que “para ser -1,5 é fazer para trás, é como se fizéssemos -7×3, logo é -21”. Nas *operações* realizadas pela aluna, nota-se alguma falta de cuidado na verificação do valor inicial 10×3, estando apenas atenta à variação do x, o que a leva a responder incorretamente à questão colocada.

Para procurar a imagem correspondente ao objeto 2,75 a aluna, não estende o domínio de aplicação desta tarefa a valores intermédios, alegando que:

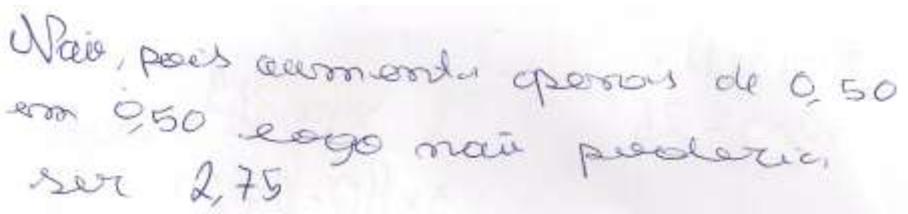
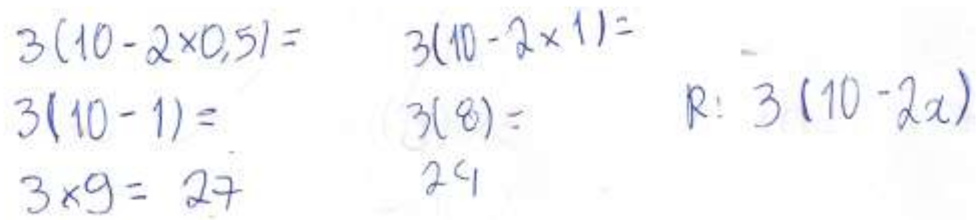

Não, pois aumenta apenas de 0,50 em 0,50 logo não poderia ser 2,75

Figura 49 – Exemplo de resolução da terceira alínea da tarefa 3 da entrevista

Possivelmente, por analogia com a tarefa anterior em que a variável independente apenas assumia valores inteiros, a aluna considerou que os valores da variável independente neste caso seriam apenas os que se obtêm adicionando 0,5 ao valor anterior.

Estabelecendo também uma conexão com o raciocínio que aplicou na tarefa anterior, a aluna afirma “Sempre menos três. Como é que eu tinha feito a outra? Mas a outra não é bem igual, mas é só para eu ver!”, e com o auxílio de casos concretos, representa simbolicamente sem dificuldade a função representada na tabela, tal como ilustra o que se segue:


$3(10-2\times0{,}5)=$
$3(10-1)=$
$3\times9=27$

$3(10-2\times1)=$
$3(8)=$
24

R: $3(10-2x)$

Figura 50 – Exemplo de resolução da quarta alínea da tarefa 1 da entrevista

Verifica-se nesta tarefa que a Rosa estabelece *relações* com *situações* exploradas anteriormente, reconhecendo caraterísticas gerais idênticas às apresentadas na tarefa anterior e que facilmente readapta utilizando duas situações concretas, em função dos novos valores variantes e invariantes. Apoiando-se nestes exemplos concretos, a aluna consegue exprimir a relação presente na tabela através da representação algébrica - uma *regra geral.*

Nesta tarefa, também o Dinis identifica semelhanças com os dados da tabela da sequência presente na tarefa anterior, afirmando que "então aqui é tipo uma sequência, temos que procurar como se forma (…) [o y] é sempre menos três, é igual há pouco mas só no y". Assim, o aluno consegue estabelecer uma *relação* entre duas *situações*.

Ainda analisando a tabela, o aluno consegue distinguir um *padrão* na coluna da variável independente, afirmando que "[o x] é sempre mais 0,5 (…) ou reduz sempre 0,5 se formos para cima".

Para determinar a imagem que corresponde ao objeto -1,5, o aluno, analisando a construção da tabela, afirma que "tenho de recuar 3 no x, logo acrescento 3 vezes 3 no y". Assim, efetuando *operações* diretamente na tabela para determinar a nova imagem, chega ao resultado e escreve:

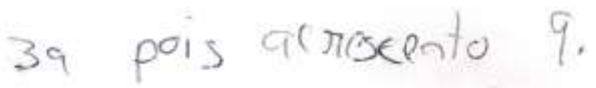


Figura 51 – Exemplo de resolução da segunda alínea da tarefa 3 da entrevista

O aluno evidencia deste modo, que utiliza com facilidade a noção de co-variação das quantidades para encontrar outros valores da função.

Em relação à terceira questão, tal como a Rosa, o Dinis não considera ser possível ter o valor 2,75 como objeto, por não considerar valores intermédios para a variável independente. Justifica a sua ideia, afirmando que "aqui não há mais números decimais sem ser vírgula cinco".

Na tentativa de encontrar uma *regra geral,* e frustrado por não ter conseguido fazê-lo na tarefa anterior, o aluno começa por afirmar que "aqui tenho que somar qualquer coisa para o zero dar trinta", o que denota que apesar de verificar que são múltiplos de três tem noção que terá que ajustar o resultado de alguma forma, uma vez que o zero é elemento absorvente da multiplicação. Após alguns processos de tentativa e erro que realiza mentalmente, o aluno começa a orientar o seu raciocínio referindo que "para dar 30 é 10 vezes 3, então no 0 é 10 menos 0 vezes 3. O 0,5 teria de ser 9 vezes 3, 10 menos 1 vezes 3 [e assim sucessivamente até ao objeto 1,5]". De seguida, relacionando os objetos com o valor que se retira ao número dez, escreve:

$0 \times 2 = 0 \quad (10 - 0) \times 3 = 30$

$0{,}5 \times 2 = 1 \quad (10 - 1) \times 3 = 27$

$1 \times 2 = 2 \quad (10 - 2) \times 3 = 24$

$(10 - \{x \times 2) \times 3 = y$

Figura 52 – Exemplo de resolução da quarta alínea da tarefa 3 da entrevista

Por fim, o aluno refere que "o 10 e o $\times 3$ são fixos e o que tiramos ao dez vai sempre sendo mais um", conseguindo assim referir o que varia e o que fica invariante na expressão.

O Ricardo começa por questionar a professora sobre o facto de as variáveis estarem "relacionadas na mesma função", ou seja, se o objetivo é relacionar simultaneamente as duas colunas. De seguida afirma que "quando o x amenta ou y diminui" e encontra uma relação mais forte entre a variação do x e do y, afirmando que "cada vez que aumenta 0,5 num, no outro diminui três", expressando a co-variação das grandezas. Deste modo o aluno identifica uma propriedade dinâmica da função, designada na taxonomia de Ellis (2007a) por *continuação do fenómeno*.

O raciocínio anterior é utilizado para determinar a imagem correspondente ao objeto $-1{,}5$, tal como ilustra o que se segue:

Se quando o x aumenta 0,5 o y diminui 3, quando o x diminuir 0,5, o y aumentará 3.

$0{,}5 \times 3 = 1{,}5. \quad 3 \times 3 = 9 \quad 30 + 9 = 39$

Figura 53 – Exemplo de resolução da segunda alínea da tarefa 3 da entrevista

Relativamente à terceira questão, tal como os restantes alunos, o Ricardo não considera valores intermédios para a variável independente. Justifica a não existência do objeto 2.75, referindo que "não existe porque se [o x] anda de 0,5 em 0,5 não podem existir metades de 0,5".

Para determinar uma regra geral que represente a situação descrita na tarefa, o aluno de imediato identifica que precisa de definir uma função afim, e para auxiliar o seu raciocínio representa graficamente a situação dada através da tabela:

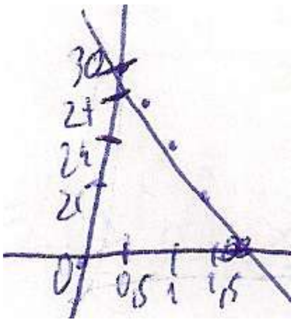


Figura 54 – Exemplo de exploração do aluno na quarta alínea da tarefa 3 da entrevista

Note-se que o referencial desenhado não é ortogonal porque o aluno apenas parece pretender fazer um esboço para o encaminhar na interpretação da situação. Após uma análise rápida do gráfico, o aluno afirma que o “k é negativo pois a reta está a descer e 30 é onde toca o y”. Pensa, imediatamente, na expressão $y = -x + 30$ e confirma-a com o primeiro par ordenado (0,30), mas não satisfeito experimenta com o segundo par ordenado da tabela (0,5; 27) que verifica não funcionar. Procura então tirar partido de um *procedimento* algébrico que aprendeu nas aulas para determinar corretamente o valor do declive, escrevendo:

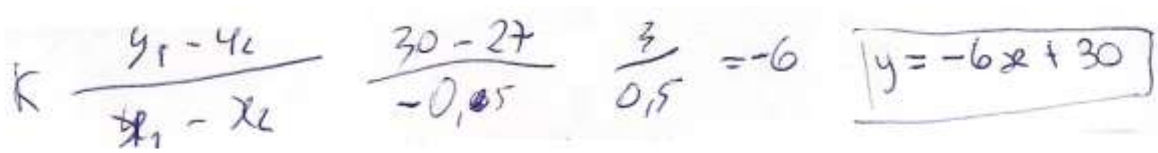
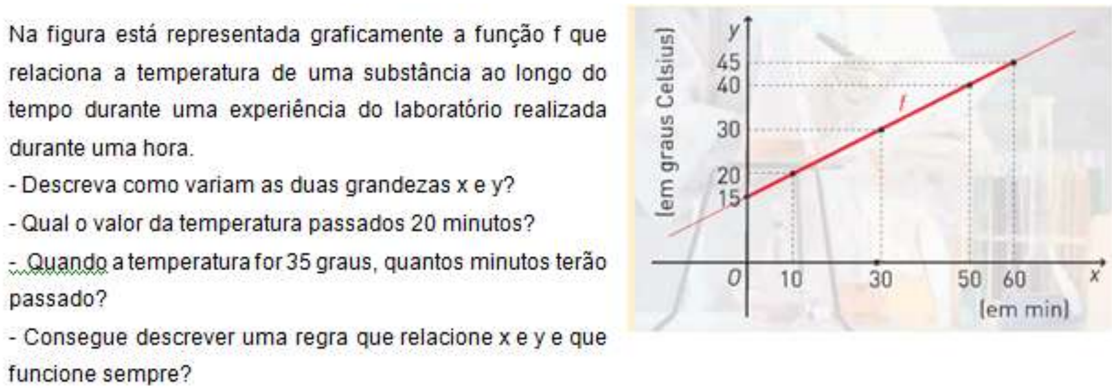


Figura 55 – Exemplo de resolução da quarta alínea da tarefa 3 da entrevista.

Nesta tarefa os alunos revelam alguma dificuldade em conseguir expandir os valores da variável independente para além do intervalo de aplicação dado, fazendo-o apenas para valores com certas características, que induzem do padrão identificado, e não para qualquer número real.

5.1.4. Tarefa 4 – Funções representadas graficamente


Na figura está representada graficamente a função f que relaciona a temperatura de uma substância ao longo do tempo durante uma experiência do laboratório realizada durante uma hora.

- Descreva como variam as duas grandezas x e y?
- Qual o valor da temperatura passados 20 minutos?
- Quando a temperatura for 35 graus, quantos minutos terão passado?
- Consegue descrever uma regra que relacione x e y e que funcione sempre?

Figura 56 – Enunciado da tarefa 4 proposta na entrevista.

A Rosa começa por *procurar relações* entre as abcissas e as ordenadas, dividindo o *x* pelo *y* e também tentando utilizar o raciocínio da regra três simples. Estas tentativas são abandonadas por considerá-las inconclusivas relativamente à existência de uma relação invariante entre as abcissas e as ordenadas. Evidenciando desistir de encontrar mais relações, a aluna refere que “se o x aumenta o y também”.

Para determinar a temperatura ao fim de 20 minutos a aluna, através da leitura do gráfico, indica um valor aproximado mas questiona-se sobre a adequabilidade desta sua abordagem, dizendo “mas e se não está à escala?”. De seguida, tentando encontrar um resultado justificado analiticamente, aplica a regra de três simples, com o par ordenado (10; 20):

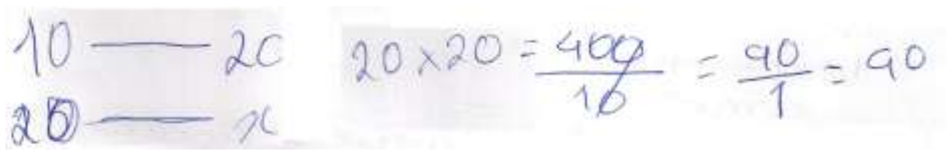


Figura 57 – Exemplo de tentativa de resolução da segunda alínea da tarefa 4 da entrevista

Ao obter o valor 40, a aluna abandona-o rapidamente por considerar que o resultado obtido é impossível alegando que se consegue fazer essa verificação através da observação do gráfico. A aluna desiste das estratégias anteriores e tenta encontrar uma regra que relacione x e y. Com efeito, observa que o gráfico “vai aumentando de 5 em 5, o y, e este aqui [referindo-se ao x] vai ao mesmo tempo de 10 em 10”, conseguindo assim relacionar a variação do x com a do y. Deste modo, a aluna identifica uma propriedade dinâmica da função de *continuação do fenómeno*, que a auxiliará posteriormente na determinação do valor do declive da função afim.

Depois de outras tentativas infrutíferas, a aluna identifica que a função representada graficamente é uma função afim, e tenta utilizar *procedimentos* algébricos efetuados nas aulas: "…b é 15, onde toca na linha dos yy's. k é positivo, mas o k é y a dividir por x, não é stôra? Há outra maneira de fazer o k com o triângulo…". De seguida a aluna desenha incorretamente vários triângulos, tal como ilustra a seguinte figura:

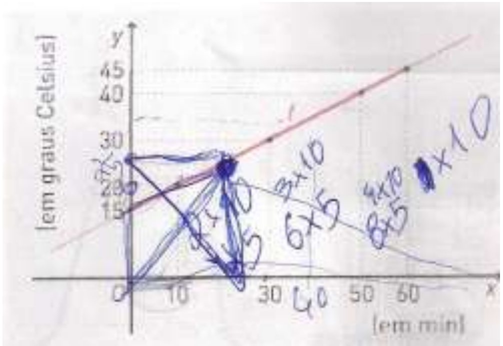


Figura 58 – Exemplo de tentativa de resolução da quarta alínea da tarefa 4 da entrevista

Após abandonar este procedimento e voltando ao inicial, a aluna divide a variação do y (5) pela variação do x (10), que tinha anteriormente referido como relação entre as variáveis. Assim sendo, a Rosa chega à regra geral apresentada em baixo e, após solicitação da professora, identifica na expressão o significado das constantes encontradas no contexto do problema:

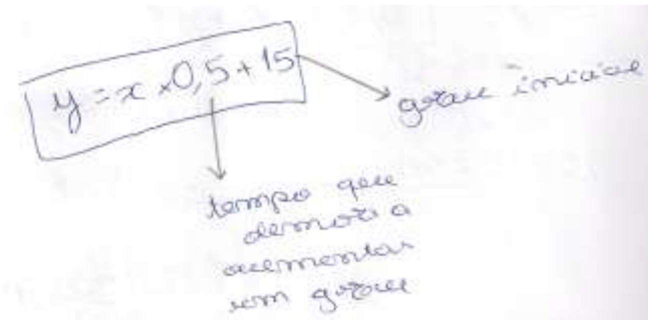


Figura 59 – Exemplo de resolução da quarta alínea da tarefa 4 da entrevista

Mais uma vez a aluna toma a iniciativa de confirmar os seus resultados, afirmando "Deixe ver se assim já tem lógica". Testa a veracidade da *regra geral* para aquela situação com exemplos concretos substituindo-os na expressão encontrada, tal como é ilustrado no que se segue:

$$y = 20 \times 0{,}5 + 15$$
$$y = 10 + 15 = 25$$
$$y = 25$$
$$y = 90 + 15 =$$
$$= y = 55$$

Figura 60 – Exemplo de resolução da segunda alínea da tarefa 1 da entrevista

Desta maneira, a aluna *procura* se a regra geral pode ser aplicada a outros *resultados*.

Para encontrar um novo objeto referente a uma imagem dada, a aluna equaciona a situação e resolve-a, aplicando desta maneira um *procedimento* algébrico.

$$35 = x \times 0{,}5 + 15$$
$$\frac{35-15}{0{,}5} = x$$
$$\frac{20}{0{,}5} = x$$
$$\frac{40}{1} = x$$

Figura 61 – Exemplo de resolução da terceira alínea da tarefa 4 da entrevista

Nesta tarefa, o Dinis inicialmente começa por descrever uma *relação* entre os valores de x e outra entre os valores de y, mas não os relaciona entre si.

y anda de 5 em 5 e o x de 10 em 10

Figura 62 – Exemplo de resolução da primeira alínea da tarefa 4 da entrevista

No entanto, mais à frente acaba por estabelecer uma relação entre a variação da tempo e da temperatura afirmando "o que anda no x é o dobro do que anda no y", identificando uma co-variação entre as duas grandezas.

Para determinar a temperatura correspondente aos 20 minutos, o aluno apoia-se na co-variação das grandezas identificada e encontra o valor 25, justificando "15 é o valor quando é zero [na temperatura] (…) no x anda de 10 em 10. 20 anda 2 vezes e no y também, logo é mais 10".

No entanto, devido à falta de tempo disponível para completar a entrevista, o aluno não conseguiu realizar a terceira questão.

Para determinar a regra geral, o aluno por falta de tempo e sem apresentar uma estratégia de resolução para esta questão, apenas verifica que o b da expressão que representa a função afim é 15, porque “é o que se acrescenta, é o valor quando é zero” e escreve:

Figura 63 – Exemplo de tentativa de resolução da quarta alínea da tarefa 4 da entrevista

O Ricardo rapidamente analisa o gráfico e associa os dados apresentados a uma relação funcional, procurando estabelecer correspondências entre objetos e imagens, o que é ilustrado pelas suas afirmações: “de 10 em 10 minutos aumenta 5ºC”. Mais uma vez o aluno identifica uma propriedade dinâmica da função, de *continuação do fenómeno*, que utiliza para determinar a temperatura ao fim de 20 minutos.

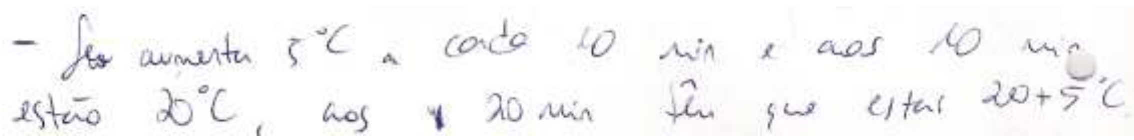


Figura 64 – Exemplo de resolução da segunda alínea da tarefa 4 da entrevista

Para determinar o instante que corresponde à temperatura 35, o aluno recorre a raciocínios inversos, tal como ilustra o seu registo escrito:

Figura 65 – Exemplo de resolução da terceira alínea da tarefa 4 da entrevista

Quando lhe é solicitada a justificação dos cálculos realizados, o aluno refere “aos 35 retiro os 15 iniciais, que era quando estava no zero, e vai dar 20 e depois divido por 5 para ver quantos dez minutos passaram, que foram 4 vezes 10 minutos”

Para determinar a *regra geral*, verifica tratar-se, tal como na tarefa anterior, de uma função afim, do tipo $y = kx + 15$, e de seguida, determina o valor de k, utilizando um procedimento que foi trabalhado na aula, tal como se verifica no seguinte:

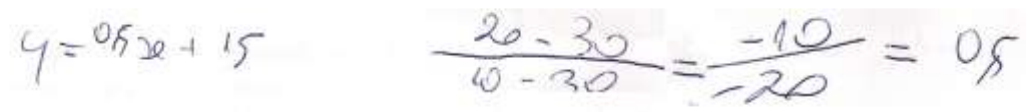


Figura 66 – Exemplo de resolução da quarta alínea da tarefa 4 da entrevista.

Ao escrever a expressão algébrica, e após solicitação da professora, o aluno justifica que “0,5 (declive) é quantos graus aumenta por minuto, e 15 (ordenada na origem) são os graus com que iniciaram a experiência”, o que demostra a sua facilidade em atribuir significado no contexto do problema aos objetos matemáticos envolvidos nas suas generalizações.

O aluno revela compreensão das relações quantitativas envolvidas em cada uma das situações, o que lhe permite responder às perguntas utilizando o significado das operações realizadas e dos resultados obtidos.

5.1.5. Síntese

Através da análise dos dados recolhidos, pode-se verificar que existem vários indícios de raciocínios de generalização por parte destes alunos, sendo que a Rosa e o Ricardo apresentam-nos com maior frequência, correção e variedade, enquanto o Dinis nem sempre os consegue finalizar de forma produtiva. As ações de generalização referidas no estudo de Ellis (2007b) surgem com variedade e frequência, nomeadamente, relações com situações anteriores, procura de relações, procedimentos, padrões e soluções e extensão a novos casos utilizando operações matemáticas e continuando padrões. Em relação às declarações de generalização, os alunos identificam propriedades dinâmicas nas funções (fenómenos de continuação) e encontram regras verbais ou algébricas para descrever relações gerais.

Na primeira tarefa, o contexto visual permitiu que os três alunos facilmente identificassem várias relações entre as caraterísticas da figura. Os alunos numa fase inicial da exploração das tarefas tentam encontrar a existência de *padrões* mas rapidamente evoluem para a procura de relações que caraterizam as sequências ou funções. Na maioria das vezes conseguem focar-se em relações que são pertinentes para a determinação de uma *regra geral,* a qual procuram sempre encontrar.

5.2. Estratégias e dificuldades

Seguidamente serão enunciadas as principais estratégias delineadas pelos alunos deste estudo ao longo da realização das tarefas propostas, bem como serão referidas as dificuldades que os alunos apresentaram.

A Rosa conseguiu analisar e interpretar as funções quando apresentadas através de várias representações, formalizando corretamente os seus raciocínios e, por não estar confiante das suas conjeturas, revelando uma grande preocupação em validar as generalizações efetuadas algebricamente, recorrendo a alguns testes com casos particulares. A aluna também conseguiu abandonar algumas caraterísticas presentes nas várias situações, concentrando-se em relações entre as variáveis que lhe permitissem encontrar a expressão algébrica. Por vezes a aluna hesitou na formulação das suas conjeturas, por parecer não perceber os *procedimentos* aprendidos na aula, aos quais nem sempre conseguiu atribuir *significado*. Esta aluna manifestou dificuldades esporádicas na formalização das suas generalizações, o que se deve a *erros de cálculo* ou na escrita simbólica, facto que conseguiu ultrapassar após realizar testes com exemplos.

O Dinis, apesar de revelar ter capacidade de encontrar diversas regularidades entre os objetos nos vários contextos das funções de variável natural ou não, apresenta algumas dificuldades em estabelecer relações produtivas, nem sempre conseguindo finalizar corretamente as suas tentativas de generalização. Este facto deve-se, por um lado, à concentração do aluno em abordagens recursivas (estratégia *aditiva*) que, tal como Ponte, Branco e Matos (2009a) referem, torna-se um obstáculo na determinação da relação entre cada termo e respetiva ordem, *dificultando a representação algébrica*. Por outro lado, o aluno revela maiores dificuldades na exploração de situações em contextos numéricos por não conseguir atribuir-lhes significado, nem estabelecer relações entre as variáveis no contexto das tarefas, tal como se verificou quando, apesar de fazer uma leitura correta da informação dada graficamente, não conseguiu transformar a relação funcional presente no gráfico numa representação algébrica.

O Ricardo sente habitualmente a necessidade de encontrar a expressão algébrica para resolver as questões propostas, mesmo quando tal não lhe é solicitado em determinada questão. O aluno interpreta corretamente as situações propostas, apresentando um raciocínio algébrico bem desenvolvido, demostrando ser capaz de generalizar corretamente as diferentes situações apresentadas e de relacionar as várias representações das funções. Este aluno tem a preocupação de testar as suas generalizações para alguns casos, muitas das vezes mental ou oralmente, no entanto, só sente necessidade de explicá-las quando solicitado pela professora. No seu processo de generalização utiliza a sua interpretação das situações apresentadas, relacionando corretamente os objetos matemáticos e o seu significado e, por vezes, também utiliza alguns procedimentos algébricos trabalhados durante as aulas, sem nunca perder o sentido dos mesmos.

Apesar de os alunos apresentarem desempenhos diferentes quanto ao processo generalização, facilmente todos compreenderam o modo de formação das sequências/funções apresentadas e reconheceram várias regularidades, identificando corretamente os termos seguintes e procurando termos com determinadas caraterísticas, através de raciocínios inversos ou de processos de tentativa e erro. Durante o processo de generalização, os alunos recorreram a várias estratégias documentadas, nomeadamente aditivas e de decomposição de termos.

Durante a realização das tarefas os alunos foram autónomos, delineando sempre as suas próprias estratégias ou utilizando procedimentos aprendidos nas aulas. No entanto, nas tarefas envolvendo sequências apresentam mais estratégias próprias, enquanto nas funções privilegiam procedimentos trabalhados nas aulas.

Nota-se que os alunos conseguem distinguir sequências de funções. No entanto, uma das dificuldades apresentadas pelos três alunos foi a incapacidade de estender as situações descritas a valores intermédios para a variável dependente no caso das funções.

Os alunos apresentam algumas incorreções na realização de procedimentos e na escrita matemática e nem sempre foram rigorosos a nível da linguagem, apresentando algumas dificuldades em exprimir corretamente os seus raciocínios.

Na maioria das vezes os alunos não sentiram a necessidade de justificar os seus raciocínios, principalmente no que diz respeito à explicitação de significados dos elementos matemáticos das regras gerais encontradas, no contexto das situações apresentadas.

6. A concluir

De acordo com o objetivo do estudo, e na tentativa de responder às questões delineadas inicialmente, neste capítulo serão apresentadas as principais conclusões tendo em conta a aplicação da proposta pedagógica e a análise dos dados, nomeadamente, no que diz respeito ao processo de generalização, às estratégias e às dificuldades apresentadas pelos alunos. Por último, serão apresentadas breves reflexões sobre o trabalho desenvolvido.

6.1. Conclusões do estudo

6.1.2. O processo de generalização

No que diz respeito ao trabalho desenvolvido aquando da aplicação da proposta pedagógica e durante as entrevistas individuais, verificou-se que as tarefas envolvendo padrões visuais contribuíram significativamente para a procura de relações entre as variáveis, que posteriormente foram algebrizadas, tal como é referido no estudo de Barbosa (2011). Assim, as figuras permitiram que os alunos privilegiassem estratégias de decomposição de termos, que desempenham um papel essencial na realização de generalizações e auxiliam o desenvolvimento do raciocínio dos alunos em contextos numéricos.

Para além da importância dos padrões visuais, também verifiquei que o processo de generalização decorreu mais fácil e rapidamente, quando as tarefas foram focadas em outras relações quantitativas, tais como a utilização de situações contextualizadas, do que em padrões numéricos "desconectados de quantidades", uma vez que proporcionam diferentes tipos de generalização, onde se destaca a procura de relações entre objetos e entre situações, em detrimento da procura de padrões e de procedimentos, tal como Ellis (2007b) refere no seu estudo.

Assim sendo, estes resultados evidenciam que as tarefas propostas nas aulas têm um papel fundamental no desenvolvimento da capacidade de generalização, devido à importância que a representação visual e as situações contextualizadas têm na compreensão de conceitos abstratos, potenciando o desenvolvimento do raciocínio algébrico.

Ao longo das entrevistas, verificou-se que existem vários indícios de raciocínios de generalização por parte destes alunos, sendo que a Rosa e o Ricardo apresentam-nos com maior frequência, correção e variedade, enquanto o Dinis nem sempre os consegue finalizar de forma produtiva. As ações de generalização referidas no estudo de Ellis (2007a) surgem com variedade e frequência, nomeadamente, as relações com situações anteriores, a procura de relações, de procedimentos, de padrões e de soluções e a extensão a novos casos utilizando operações matemáticas e continuando padrões. Em relação às declarações de generalização, os alunos identificam propriedades dinâmicas nas funções (fenómenos de continuação) e encontram regras verbais ou algébricas para descrever relações gerais. No entanto, destacam-se algumas que estão mais presentes nos seus raciocínios, nomeadamente: as relações com situações anteriores, utilizando raciocínios de tarefas prévias como base para a exploração de novas situações e identificando semelhanças entre o trabalho a desenvolver com as sequências e as funções; a procura de relações entre elementos de figuras e entre números da linha e termos da sequência; a procura de padrões que caraterizem a construção das sequências e das figuras; a extensão a novos casos utilizando operações matemáticas e continuando padrões; e a identificação de regras verbais ou algébricas como forma de descrever relações gerais. Estas conclusões vão ao encontro dos resultados obtidos no estudo de Ellis (2007b), onde a autora verificou que os raciocínios mais utilizados pelos alunos são as relações com situações anteriores, a procura de relações, a extensão a novos casos, a procura de propriedades comuns e de regras gerais.

Respondendo à primeira questão do estudo, *Como se evidencia a capacidade de generalização dos alunos?*, verifica-se que a capacidade de generalização não é apenas um produto final, mas sim todo um processo de produção, tal como Ellis (2007a) refere. Assim, ao longo do estudo, foi notório que os alunos apresentam indícios de raciocínios importantes durante todo este processo que antecedem o culminar da generalização através da representação algébrica, nomeadamente, raciocínios inversos para verificar a existência de imagens, verbalização de relações entre variáveis e utilização das mesmas para determinar imagens, conversão entre diferentes representações das funções, atribuição de significados a objetos matemáticos associados a procedimentos algébricos e processos de tentativa e erro orientados pela descoberta prévia de uma relação entre as variáveis dependente e independente, tal como sucedeu no estudo de Barbosa (2010).

6.1.2. Estratégias e dificuldades

Em relação às tarefas propostas nas entrevistas, os alunos demonstraram compreender o processo de formação das sequências/funções apresentadas, no entanto, nem todos conseguiram identificar relações pertinentes que os encaminhassem na construção da regra geral.

O Dinis focou-se com frequência em raciocínios recursivos, principalmente para calcular termos ou ordens, facto que, por vezes, o impediu de chegar a generalizações corretas, tal como é referido no estudo de Ponte, Branco e Matos (2009a). Por vezes este aluno utilizou estratégias de tentativa e erro para resolver as questões propostas, tal como é referido por Barbosa (2011) e Radford (2006). A Rosa também iniciou o seu trabalho de exploração das tarefas através de raciocínios recursivos, de forma a tentar organizar as suas ideias, mas rapidamente evoluiu para raciocínios mais funcionais, tentando estabelecer relações entre as variáveis, de acordo com o que foi verificado por Santos (2008). Esta aluna nem sempre demostrou confiança nos seus argumentos necessitando várias vezes de testá-los através de casos concretos. Quanto ao Ricardo, sentiu com frequência necessidade de representar de forma algébrica as suas conjeturas, o que fez sem dificuldades após rapidamente encontrar relações entre as variáveis, valorizando assim o poder da regra geral, facto que também foi verificado no estudo de Santos (2008), onde os alunos manifestaram intenção em generalizar algebricamente. Durante as tarefas propostas, este aluno denotou um bom domínio do raciocínio algébrico e demonstrou autonomia na construção das suas ideias e confiança nas mesmas.

Ao longo das entrevistas realizadas notou-se diferenças ao nível das estratégias delineadas pelos alunos e do tempo necessário para realização das tarefas, facto que se deve ao patamar do raciocínio algébrico de cada aluno.

Numa análise preliminar das tarefas, os alunos concentraram-se em relações essencialmente recursivas, no entanto, depressa evoluíram nos seus raciocínios, procurando e reconhecendo, quase sempre, relações entre as variáveis. Assim sendo, tal como no estudo de Santos (2008), na maioria das vezes, os alunos conseguiram abandonar certas relações, baseadas no reconhecimento de propriedades das figuras ou dos números, em detrimento de outras, tais como, a procura de relações entre as variáveis, que os encaminharam na procura de generalizações do ponto de vista algébrico. Esta flexibilidade que os alunos foram desenvolvendo ao estabelecer certas relações, auxiliou-os na escolha do processo que conduz mais facilmente à generalização e revela-se de extrema importância para o desenvolvimento da capacidade de generalização dos alunos (Santos, 2008).

De frisar que os alunos do estudo estavam sensibilizados para a necessidade de procurar relações entre variáveis e para posteriormente formalizarem algebricamente os seus raciocínios, facto que confirma os resultados obtidos no estudo de Santos (2008), onde a autora assistiu ao desenvolvimento de estratégias próprias utilizadas pelos alunos e revestidas de uma intencionalidade em chegar a uma generalização formal definida algebricamente. Para além deste foco na formalização algébrica, os alunos frequentemente sentiram necessidade de confirmar os seus raciocínios utilizando casos particulares, procedimento também muito importante no processo de generalização.

Apesar de, sempre que possível, os alunos terem tentado resolver as tarefas mobilizando os seus conhecimentos através de raciocínios próprios e com significado tal como é referido por Santos (2008), a Rosa e o Ricardo por vezes preferiram utilizar alguns procedimentos trabalhados nas aulas.

Comparativamente com o trabalho desenvolvido pelos alunos aquando da proposta pedagógica, notam-se algumas diferenças. Inicialmente as relações estabelecidas pelos alunos eram essencialmente recursivas e associadas a caraterísticas dos termos ou das variáveis independentes, enquanto na entrevista se verificou que alguns alunos já conseguiam abandonar determinadas relações em detrimento de outras mais produtivas a nível da generalização. Nota-se que os alunos ficaram sensibilizados para a tentativa de relacionar a ordem do termo com o termo, no caso da sequência, ou a variável independente com a dependente, no caso das funções reais de variável real e para a necessidade de justificar e testar as suas conjeturas, confirmando-as com outros exemplos. Desta forma, considero que os alunos consolidaram aspetos importantes do processo de generalização.

Em relação às dificuldades mais presentes no raciocínio dos alunos estas prendem-se essencialmente com a incapacidade de estenderem o domínio das situações descritas a valores intermédios, facto que poderia ter sido colmatado com uma transição das sequências para as funções mais eficaz, nomeadamente no que diz respeito à distinção entre o domínio das funções de variável natural e de variável real, que futuramente poderá ser trabalhada através de uma maior insistência na representação gráfica de sequências versus funções.

Por outro lado, os alunos em causa também manifestaram estar pouco sensibilizados para justificar verbalmente ou através da escrita os seus raciocínios, o que por vezes se tornou uma dificuldade na apresentação de fundamentações explícitas. Esta ideia vai ao encontro dos resultados apresentados por Cunha (2010), que refere que os alunos do seu estudo revelaram falta de hábitos de comunicação matemática, o que se tornou uma dificuldade quando houve necessidade de expressarem os seus raciocínios justificadamente, oralmente ou por escrito.

O Dinis, baseando-se com frequência em raciocínios recursivos, demonstrou dificuldades em transitar do concreto para o abstrato, o que se tornou um obstáculo à formalização algébrica das suas ideias descritas verbalmente, tal como referido nos estudos de Ponte, Branco e Matos (2009a) e Pereira e Fernandes (2012). Também Cunha (2010) refere que os alunos do seu estudo apresentaram dificuldades em utilizar uma linguagem formal para explicitar simbolicamente a regra geral de formação da sequência, apesar de conseguirem recorrer a raciocínios que evidenciam a presença da capacidade de generalização para determinar corretamente termos distantes. Pereira e Fernandes (2012) também identificaram a transição entre diferentes representações como uma dificuldade, o que se verificou com este aluno aquando da conversão entre a representação gráfica e numérica de funções.

Retomando as questões do estudo, as *estratégias* que os alunos adotaram basearam-se essencialmente na decomposição de termos, associada a um raciocínio relacional entre as variáveis e, com menos influência na aditiva, baseada num raciocínio recursivo, de acordo com as estratégias apresentadas por Ponte, Branco e Matos (2009a). Relativamente às *dificuldades* apresentadas durante o processo de generalização, estas prendem-se essencialmente com alguma falta de hábitos em justificar correta e percetivelmente as suas ideias, com a transição entre o concreto e o abstrato e com a incapacidade de estender o domínio de aplicação de algumas situações descritas a valores intermédios.

As dificuldades e estratégias apresentadas pelos alunos deste estudo vão de encontro ao que tem vindo a ser apresentado em vários estudos sobre a aprendizagem da Álgebra.

6.2. Reflexão sobre o trabalho realizado

Dadas as características deste estudo, os seus resultados não podem ser generalizáveis, no entanto, considero que o trabalho realizado foi bastante positivo para os alunos por lhes ter proporcionado momentos que contribuíram significativamente para o desenvolvimento do raciocínio matemático, através da reflexão, da discussão de ideias e da delineação e comparação das próprias estratégias. Por outro lado, registo com satisfação que o desempenho e entusiamo dos alunos, em todo o processo, foi um grande contributo para os resultados relevantes obtidos neste trabalho.

Outro aspeto positivo a destacar foi a oportunidade que este estudo me facultou ao possibilitar uma reflexão mais aprofundada sobre a minha prática letiva, nomeadamente na procura e construção de novas sequências de tarefas a propor nas aulas e na discussão das suas potencialidades no desenvolvimento da capacidade de generalização dos alunos.

Em relação às dificuldades emergentes, apesar das vantagens que um professor tem em desempenhar o seu papel conjuntamente com o de investigador, considero que na observação das aulas exercê-lo simultaneamente se tornou uma tarefa difícil. Por um lado, pela impossibilidade de conseguir detetar todas as possíveis observações pertinentes e, por outro, pelo facto de as anotações que foram sendo tiradas durante o decorrer das aulas poderem quebrar o ritmo da mesma.

A interpretação e o enquadramento dos resultados obtidos na taxonomia de Ellis (2007a) também foi uma dificuldade verificada neste estudo, pelo facto da mesma, por vezes, ser muito detalhada e de se registarem algumas aparentes intersecções entre categorias.

Numa futura investigação, seria interessante analisar a evolução da capacidade de generalização dos alunos ao longo de um ciclo e fazer um estudo mais abrangente, com mais alunos para poder recolher outros exemplos da taxonomia de Ellis, principalmente para averiguar quais as tipologias que surgem com mais frequência.

Embora tenha realizado tarefas diagnósticas antes de iniciar o tema das funções, os resultados obtidos não foram uma mais-valia para este trabalho, uma vez que não foi possível aferir o raciocínio que os alunos utilizaram para chegar às respostas apresentadas. Por esta razão, considero que teria sido pertinente entrevistar os alunos estudo de caso também antes da unidade de ensino de forma a analisar a evolução do seu raciocínio.

Para finalizar, considero que a realização deste trabalho permitiu-me aprofundar o meu conhecimento sobre o tema, por um lado, pelo contacto com outros estudos existentes e, por outro, pela reflexão sobre a minha prática que contribuirá para o aperfeiçoamento da mesma.

6.3. Reflexão final

Para promover o desenvolvimento da capacidade de generalização, o professor deve propor aos seus alunos tarefas onde se dê primazia ao contexto, quer pictórico, dando-lhes oportunidade de explorarem padrões visuais, quer em situações contextualizadas apresentadas numérica ou graficamente. Só assim os alunos serão estimulados a associarem objetos, estabelecerem relações, descreverem verbal e algebricamente as suas generalizações, possibilitando-lhes a construção dos seus próprios raciocínios, para que no futuro estejam preparados para produzir corretamente argumentos gerais e articulados com os seus próprios conhecimentos.

O professor deve estar consciente de que o trabalho com sequências é um elemento fulcral no desenvolvimento da capacidade de generalização, estimulando a necessidade e a importância da generalização dos seus raciocínios e promovendo a autonomia na definição das suas próprias estratégias. Nas suas aulas o professor deve propor tarefas que sejam apresentadas de diferentes formas e que promovam a procura de relações entre a ordem e as características dos termos.

Em relação à dinamização das aulas, os professores devem solicitar aos alunos a explicação clara dos seus argumentos e devem colocar questões que lhes estimulem o raciocínio, tais como: *O que se prevê que aconteça*?, *O que é que é sempre igual?*, H*á mais regularidades? Funciona sempre?.*

Assim sendo, considero que os professores de Matemática se encontram numa situação privilegiada para conhecer e compreender as dificuldades presentes na sala de aula e que devem investigar a sua prática na tentativa de contribuir para o sucesso de todos os nossos alunos.

É óbvio que ainda existe um longo percurso a percorrer no sentido de entender e ajudar os alunos a ultrapassarem as suas dificuldades na aprendizagem da Álgebra, nomeadamente no tema das funções, para isso considero que cada professor, conjuntamente com os seus colegas, deverão passar por momentos de investigação do processo de aprendizagem dos alunos e partilhá-los de forma a contribuir para a melhoria das práticas letivas em Matemática, com vista ao sucesso dos nossos alunos.

Em relação ao contributo deste estudo para os professores de Matemática, considero que é mais um trabalho que fica disponível num tema fundamental e problemático da Matemática, a capacidade de generalização nas funções, e que permitiu caraterizar o processo de generalização adotado pelos alunos, contribuindo para uma melhor compreensão do mesmo.

Referências

Arcavi, A. (2006). El desarrolo y el uso del sentido de los símbolos. Em I. Vale, T. Pimental, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos e P. Canavarro (Org), *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 29-48). Lisboa: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Arcavi, A. (2008). Algebra: Purpose and empowerment. In C. Greenes and R. N. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics – Seventieth NCTM Yearbook* (pp. 37-50). Reston, Virginia: NCTM.

Barbosa, A. (2010). *A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais: um estudo longitudinal com alunos do 2.º ciclo do ensino básico*. Tese de Doutoramento, Universidade do Minho.

Barbosa, A. (2011). Generalização de padrões em contextos visuais: um estudo no 6º ano de escolaridade. In M. H. Martinho, R. A. Ferreira, I. Vale & J.P. Ponte (Eds.), *Ensino e Aprendizagem da Álgebra – Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 327-345). Póvoa do Varzim: EIEM.

Branco**,** N**.** **(**2008). *O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico.* Tese de mestrado, Universidade de Lisboa.

Costa, B. & Rodrigues, E. (2010). *Novo espaço 7 volume I*. Porto: Porto Editora.

Costa, B. & Rodrigues, E. (2011). *Novo espaço 8*. Porto: Porto Editora.

Cunha, C (2010). *A utilização de ferramentas tecnológicas e os processos de aprendizagem: um estudo na introdução à Álgebra no 2º ciclo*. Tese de Mestrado. Universidade de Lisboa.

Delvin, K (2002). *Matemática: A ciência dos padrões*. Porto Editora.

Doorman, M., Drijvers, P., Gravemeijer, K., Boon, P., & Reed, H. (2012). Tool use and the development of the function concept: form repeated calculations to functional thinking. *International Journal of Science and Mathematics Education, 10*(6), 1243-1267.

Ellis, A. (2007a). A taxonomy for categorizing generalizations: Generalizing actions and reflection generalizations. *Journal of the Learning Sciences, 16*(2), 221 – 262.

Ellis, A. (2007b). The influence of reasoning with emergent quantities on students' generalizations. *Cognition and Instruction*, 25(4), 439–478.

Ellis, A. (2011). Generalizing promoting actions: How classroom collaborations can support students' mathematical generalizations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 42(4), 308 – 345.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades*. (pp. 5-17). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra with understanding. In E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: what is it? *Mathematics Educator*, *8*(1), 139–151.

Magro, F., Fidalgo, F. & Louçano, P. (2011). *Pi 8 volume I.* Lisboa: ASA.

Matos, A. (2007). *Explorando relações funcionais no 8.º ano: Um estudo sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico.* Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa.

Mestre, C., & Oliveira, H. (2011). O pensamento algébrico e a capacidade de generalização de alunos do 3º ano de escolaridade do ensino básico. In C. Guimarães & P. Reis (Orgs.) *Professores e Infâncias: Estudos e experiências,* (pp. 201-223). São Paulo: Junqueira & Marin Editores.

Mestre, C., & Oliveira, H. (2012). A co-construção da generalização nas discussões coletivas: Um estudo com uma turma do 4.º ano. *Quadrante*, *21*(2), 111-138.

Ministério da Educação (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico. Competências Essenciais*. Lisboa: Departamento do Ensino Básico.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC-ME.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM.

Oliveira, H. (2009). A Álgebra no Novo Programa de Matemática do Ensino Básico. *Educação e Matemática*, *105*, 83-86.

Pereira, M. & Fernandes, J. (2012). Estratégias de generalização de padrões de alunos do 7º ano de escolaridade. *Unión, Revista ibero-americana de educación matemática*, *29*, 85-108.

Ponte, J. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. (2006). Números e Álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & P. Canavarro (Eds.), *Números e álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 5-27). Lisboa: SEM-SPCE.

Ponte, J., & Sousa, H. (2010). Uma oportunidade de mudança na Matemática do ensino básico. In GTI (Org.), *O professor e o programa de Matemática do ensino básico* (pp. 11-41). Lisboa: APM.

Ponte, J., Branco, N., & Matos, A. (2009a). *Álgebra no ensino básico*. Lisboa: DGIDC-ME.

Ponte, J., Branco, N., & Matos, A. (2009b). *Sequências e funções*. Lisboa: DGIDC-ME.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. In S. Alatorre, J. Cortina, M. Sáiz & A. Méndez (Eds), *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *1*, 1-21.

Santos, M. (2008). *A generalização nos padrões: um estudo no 5º ano de escolaridade*. Tese de Mestrado. Universidade de Lisboa.

Serrazina, L. & Oliveira, I. (2010). Trajetórias de aprendizagem e ensinar para a compreensão. In GTI (Ed.), *O Professor e o Programa de Matemática do Ensino Básico* (pp. 43-59). Lisboa: Associação de Professores de Matemática, Grupo de Trabalho de Investigação.

Stacey, K. (1989). Finding and Using Patterns in Linear Generalizing Problems. *Educational Studies in Mathematics*, *20*(2), 147-164.

Materiais consultados

Matemática dos diabos (2002). http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2002/icm110 (consultado em 28-03-2013).

ME (2009). *Funções e equações 8º ano: materiais de apoio ao professor*. Lisboa: DGIDC-ME.

ME (2012). Matemática: questões de provas nacionais e de testes intermédios. Lisboa: GAVE-ME.

Passos, I. & Correia, O., (2010). *Matemática em ação 7 volume I*. Lisboa: Lisboa Editora.

Relatório de avaliação externa de escolas (2009). http://www.ige.min-edu.pt/upload/AEE_2010_DRLVT/AEE_10_ES3_Miraflores_R.pdf (consultado em 27-03-2013).

Relatório dos testes intermédios e exames nacionais (2011). http://www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=24&fileName=Rel_Nac_ProjTI_2011.pdf (consultado em 11-02-2013).

Relatório EScxel (2008). http://www.esmiraflores.pt/ficheiros/Relprelim_OEIRAS.pdf (consultado em 27-03-2013).

Anexos

Anexo 1- Autorização da Direção da escola

Lisboa, 30 de Novembro de 2012

Exma. Sra. Diretora da Escola Secundária com 3º ciclo de xxxxxxxx:

Eu, Andreia Margarida Guerreiro Mateus, docente de Matemática nesta escola, venho por este meio solicitar autorização para concretizar na turma 8ºxx, o trabalho que dará suporte ao meu relatório de Mestrado, a desenvolver sob orientação da Professora Doutora Hélia Oliveira, sobre o tema "A capacidade de generalização no estudo das funções no 8.º ano". Este trabalho integra-se no âmbito do curso de Mestrado em Educação na Área de Especialização em Didática da Matemática, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

No decorrer do trabalho as principais formas de recolha de dados para a concretização do mesmo serão: observação das aulas, narração escrita de momentos das aulas, entrevistas/questionários aos alunos e recolha de trabalhos produzidos pelos alunos.

Será solicitada autorização aos Encarregados de Educação dos alunos para a participação neste trabalho e será salvaguardado o anonimato.

Grata pela colaboração e com os melhores cumprimentos,

Pede deferimento,

____

(Andreia Margarida Guerreiro Mateus)

Com o conhecimento da Orientadora

____

(Hélia de Oliveira)

Anexo 2 - Autorização dos Encarregados de Educação

Lisboa, 6 de Janeiro de 2013

Exmo.(a). Sr.(a). Encarregado(a) de Educação:

Sendo a Álgebra um tema fundamental no currículo da Matemática, decidi dedicar o trabalho da minha tese de Mestrado a esta temática na tentativa de perceber as ideias construídas pelos alunos relativamente aos tópicos matemáticos abordados.

Para concretizar este propósito será necessário proceder à recolha de tarefas realizadas pelos alunos nas aulas, à narração de aulas, à possível realização de pequenos questionários/entrevistas escritas aos alunos e à gravação-vídeo de algumas aulas[(1)].

Assim sendo, e tendo em conta que é garantido o anonimato dos alunos, torna-se fundamental ter o seu consentimento para a participação do seu educando neste estudo.

Por fim informo que estou à sua inteira disposição, para prestar qualquer tipo de esclarecimento.

Agradeço a sua colaboração.
Com os melhores cumprimentos
A professora de Matemática,

____

Email: andreia_mateus@hotmail.com

(Recortar por aqui) --

Declaro que concordo que o meu educando____________________________
número _____ da turma 8ºxx da Escola Secundária com 3.º Ciclo de xxxxxxx, participe neste estudo desenvolvido pela professora Andreia Mateus.

[(1)]Autorizo/Não autorizo a gravação vídeo das aulas (riscar o que não interessa)

Data:_____________Assinatura: ___________________________________

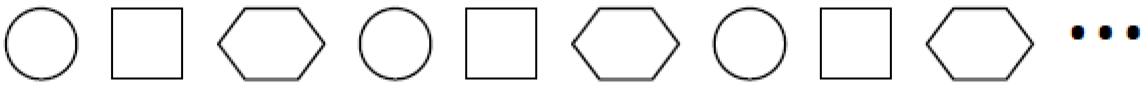
Anexo 3- Planificação da proposta pedagógica

Tempos (45´)/ Data	Tópicos	Objetivos específicos	Tarefas	Notas
	Sequências e regularidades • Termo geral de uma sequência numérica • Representação • Expressões algébricas	- Representar, analisar, descrever e generalizar padrões através de palavras, tabelas e expressões simbólicas; - Reconhecer o significado de fórmulas no contexto de situações concretas. - Reconhecer expressões algébricas equivalentes. - Compreender a noção de termo geral de uma sequência numérica e representá-lo usando símbolos matemáticos adequados. - Compreender os diferentes papéis dos símbolos em Álgebra.	Tarefas diagnósticas nºs 4 e 5	
2/(23/01/13)			Ficha "Sequências" tarefa 1	
1/(25/01/13)			Esclarecimento de dúvidas sobre a ficha de revisões	Os temas abordados não fazem parte desta proposta pedagógica
2/(29/01/13)			Ficha de avaliação global (até ao tópico das equações com denominadores)	Os temas abordados não fazem parte desta proposta pedagógica
2 (30/01/13)			Ficha "Sequências" tarefa 2 e 3	Propor a representação de sequências de frações em que os numeradores e os denominadores tenham relações simples
1/(01/02/13)			Correção do tpc tarefas 4 e 5	Correção da tarefa 4 com recurso ao Geogebra
2/(05/02/13)	**Funções** Funções linear e afim	Analisar uma função a partir das suas representações. Representar gráfica e algebricamente uma função linear e uma função afim. Relacionar as funções linear e afim. Analisar situações onde exista ou não proporcionalidade direta. Relacionar a função linear com a proporcionalidade direta. Relacionar as representações algébricas e gráfica das funções estudadas. Resolver e formular problemas, e modelar situações utilizando funções.	Ficha "Funções" tarefas 1 e 2	A partir da representação gráfica/algébrica de uma função identificar a imagem dado o objeto e o objeto dada a imagem. Tarefa 2 com recurso ao Geogebra
2/(06/02/13)			Manual tarefa da p.98 (alíneas 1,2,e 4), com o auxílio do Geogebra	Compreender a influência da variação dos parâmetros a e b (na expressão $y = ax + b$) no gráfico da função.
1/(08/02/13)			Resolução de exercícios do manual Ex.2, 4 e 7 da p.109	Sistematização e aplicação das aprendizagens sobre função afim
1/(15/02/13)			Resolução de exercícios do manual Ex.3 p. 98; 2 e 4 p.112	Sistematização e aplicação das aprendizagens sobre função afim
2/(19/02/13)			Ficha de "Funções" Correção do tpc tarefa 3 e resolução da tarefa 4	Propor a análise de gráficos que representem funções afim em contextos da vida real. Propor a representação algébrica de uma: – função linear sendo dado um objeto não nulo e a sua imagem; – função afim sendo dados dois objetos e as suas imagens.
2/(20/02/13)			Ficha de "Funções" Tarefa 5 Minificha de avaliação (Equações com denominadores, Sequências e Funções)	Avaliação dos conhecimentos
1 (22/02/13)			Entrega e correção das minifichas	Consolidação de conhecimentos
...				
1 (01/03/13)			Esclarecimento de dúvidas sobre a ficha de revisões	Consolidação de conhecimentos
2 (05/03/13)			Ficha de avaliação global (até ao tópico da resolução de sistemas graficamente)	Avaliação dos deconhecimentos

Modo de trabalho: a pares, exceto na realização da Ficha de avaliação e Mini- ficha de avaliação que serão individuais.

Anexo 4 – Tarefa diagnóstica sobre sequências

Considere a seguinte sequência:



a) Continue a representação da sequência até ao 15º elemento.

b) Qual o 12º elemento da sequência? Que outras posições ocupa essa figura?

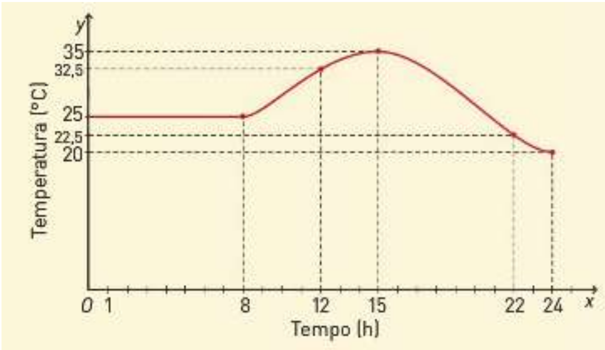
c) Sem desenhar, diga qual o 25º elemento da sequência? Explique como chegaram a essa conclusão.

d) Como explicaria a um colega vosso que o hexágono não pode estar na posição 61?

Anexo 5 – Tarefa diagnóstica sobre funções

1. "Em Lisboa hoje tivemos um dia de Verão muito quente".

O gráfico ao lado representa a variação da temperatura ao longo de deste dia, em graus *Celsius* (ºC).



a) Qual foi a temperatura às 3h da manhã?

b) Qual foi a temperatura máxima registada? A que horas isso aconteceu?

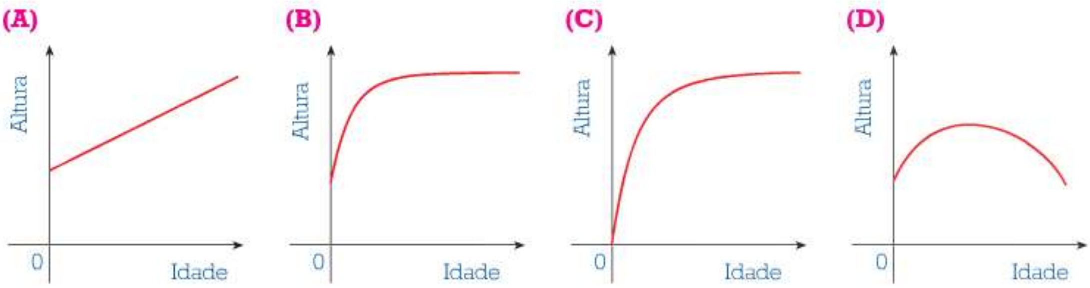
c) Entre as 8 da manhã e as 10h da noite a temperatura subiu ou desceu? Quanto? Justifique.

d) Nesse dia, pela manhã, o Paulo levantou-se quando a temperatura era de 28ºC. O Paulo levantou-se antes ou depois das 8h da manhã? Justifique.

e) Em Nova Iorque, onde a temperatura é apresentada em graus *Fahrenheit* (ºF), se num dia a temperatura variasse da mesma maneira que hoje em Lisboa, os termómetros marcariam 58 ºF à meia noite.

Comente a afirmação, sabendo que para convertermos graus *Celsius* em graus *Fahrenheit* basta multiplicar os graus *Celsius* por 1,8 e de seguida adicionar 32.

2. Observe os quatro gráficos seguintes.



Qual dos gráficos pode ilustrar a relação entre a altura e a idade de um cão, desde que nasce até morrer?

Numa pequena composição, explique, para cada um dos outros três gráficos, a razão pela qual não os escolheu.

Anexo 6- Ficha de trabalho sobre sequências

Tarefa 1 – Sequências pictóricas no plano

1.1. A Sara tem vários passeios no jardim. Como quer colocar azulejos nos passeios, desenhou o padrão que estes devem ter. Os passeios são de diferentes tamanhos e portanto, utilizou pequenos quadrados para construir os azulejos adequados a cada passeio e numerou os azulejos.

a) Desenhe a próxima figura da sequência de azulejos e verifique quantos quadrados brancos tem? E quantos quadrados cinzentos?

b) O que representa o número do azulejo?

c) Sem desenhar, digam quantos quadrados brancos tem o azulejo número 7? E quadrados cinzentos? Justifique o vosso raciocínio.

d) Quantos quadrados, no total, tem o azulejo número 10? Justifique o vosso raciocínio.

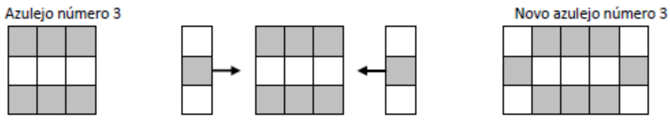
e) O que pode dizer acerca do número de quadrados cinzentos em qualquer azulejo?

f) Escreva uma expressão que represente o número de quadrados cinzentos em qualquer azulejo

g) O que pode dizer acerca do número total de quadrados em qualquer azulejo?

h) Escreva uma expressão que represente o número total de quadrados em qualquer azulejo.

1.2. A Sara decidiu desenhar um outro padrão que fosse um pouco mais elaborado. A figura ao lado mostra a transformação que a Sara fez, no azulejo número 3.



Este novo azulejo número 3 tem de comprimento 5 quadrados.

a) De acordo com esta nova construção, desenhe o número 5 e compare-o com o anterior.

b) A Sara fez um novo azulejo que, com este padrão, tem 53 quadrados de comprimento.

Qual é o número deste azulejo?

c) Qual o número do azulejo que tem, no total, 81 quadrados? Explique o vosso raciocínio.

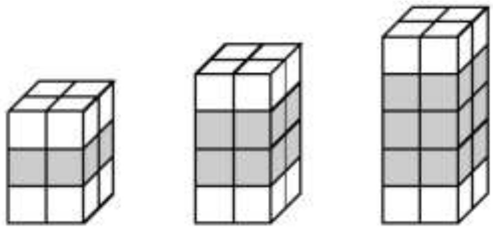
d) O Jorge e a Sara têm no total 100 quadrados para desenhar um azulejo. O Jorge pergunta à Sara se existe um azulejo que utilize exatamente os 100 quadrados. O que acha?

e) A Sara fez uma tabela para facilmente encontrar o número de quadrados que necessita para fazer um novo azulejo. Complete a tabela.

Número do azulejo (N)	Número de quadrados cinzentos	Número de quadrados brancos	Número total de quadrados (Q)
1			
2			
3	8	7	15
4			
5			
6			

f) O Jorge escreveu uma fórmula direta para calcular o número total de quadrados (Q) que constituem cada azulejo numerado (N). Escreva a fórmula que pensam ter sido usada pelo Jorge e expliquem-na.

Tarefa 2 - Sequências pictóricas no espaço



Prisma 1 Prisma 2 Prisma 3

A seguinte sequência apresenta prismas constituídos por cubos brancos e cinzentos.

a) Quantos cubos brancos tem o prisma 4? E cinzentos?

b) Verifique se existe um prisma com 36 cubos no total. Caso exista, digam qual o número desse prisma.

c) Indique uma expressão que represente o número de cubos cinzentos do prisma *n*.

d) Justifique que a afirmação que se segue é verdadeira: "*"O número total de cubos cinzentos necessários para construir qualquer prisma desta sequência é par."*

e) Apresente uma expressão para o número total de cubos do prisma *n*.

f) Verifique se a expressão 4(*n* + 2) também representa o número total de cubos do prisma *n*.

Tarefa 3 – Sequências numéricas I

Observa a sequência numérica ao lado.

1	Linha 1
1 2 1	Linha 2
1 2 3 2 1	Linha 3
1 2 3 4 3 2 1	Linha 4

a) De acordo com o padrão observado, escreva a linha seguinte e a linha 10.

b) Calcule a soma dos números de cada linha.

c) O que prevê que possa ser a soma de 1+2+3+…+99+100+99+…+3+2+1?

d) Indique uma fórmula que represente a soma dos números de cada linha.

e) Qual a soma dos números da linha 7.

f) Existirá alguma linha em que a soma dos números seja 81? E 72? Justifique a sua resposta. Em caso afirmativo construa essa linha.

Tarefa 4 – Do termo geral à sequência

Considerem a sequência de termo geral 10 - 4*n*.

a) Determine os 3 primeiros termos desta sequência.

b) Determine o termo de ordem 6 desta sequência.

c) Verifique se os termos -70, 50 e 0 são termos desta sequência.

Tarefa 5 - Sequências numéricas II

Nas alíneas seguintes encontram-se diversas sequências numéricas.

Complete cada espaço em branco com o(s) termo(s) que estão em falta e indiquem um termo geral de cada uma das sequências apresentadas

a) 1, 2, 3, ___, 5, 6, 7...

b) 2, 4, 6, ___,10,12,14...

c) 1, 3, 5, ___, 9, 11,13...

d) 3, 5, ___,9,11,13...

e) 1, 8, 27, ___, 625...

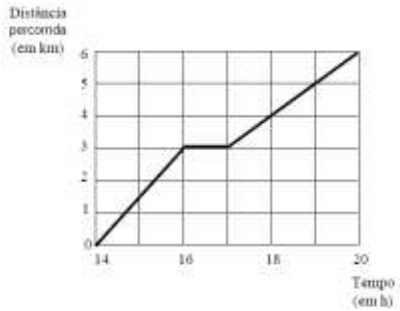
f) 9, 7, 5, 3,1,__, -3, ___, -7...

g) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \_\_\_, \frac{5}{6}$

h) $\frac{2}{2}, \frac{4}{3}, \frac{6}{4}, \_\_\_, \frac{10}{6}$

Anexo 7 - Ficha de trabalho sobre funções

Tarefa 1



O gráfico ao lado representa a distância percorrida pelo Carlos durante o percurso realizado a pé de sua casa até à casa do seu amigo António e vice-versa.

1.1. Através da observação do gráfico, responda às questões:

- **a)** Quanto tempo demorou a chegar a casa do seu amigo?
- **b)** Durante quanto tempo esteve em casa do António?
- **c)** A que distância da casa do Carlos se encontra a casa do António?
- **d)** Às 16h30 onde se encontrava o Carlos?
- **e)** Ao fim de quantas horas percorreu 4 000 m?
- **f)** O Carlos estava com mais pressa à ida ou à vinda? Justifique.
- **g)** Qual a velocidade média do Carlos durante o percurso de ida?

1.2. Desenhe o gráfico que representa a distância do Carlos a sua casa durante todo o percurso.

Tarefa 2

1.1. A Joana vive em Bragança, onde como incentivo ao povoamento, não são cobradas taxas de aluguer do contador da água. Assim, a Joana apenas paga 0,50 € por cada m^3 de água consumido.

a) Determine o preço que paga no final do mês se o seu consumo for de 20 m^3.

b) No mês de Maio a Joana pagou 10 € de água, qual foi o consumo mensal?

c) Complete a tabela ao lado.

Consumo, em m^3 (x)		40	
Custo, em € (y)	10		
$k = \dfrac{y}{x}$			

d) Descreva o modo como variam as duas grandezas.

e) O que representa o valor de k?

f) Represente graficamente os valores referentes a esta tabela.

g) Sendo x o consumo mensal em m^3, indique uma expressão analítica que represente o custo mensal do consumo de água (y).

1.2. A Ana vive em Lisboa, onde são cobradas taxas de aluguer do contador da água. Assim, a Ana paga 0,10 € por cada m^3 de água consumido mais 15 € de aluguer mensal do contador.

a) Determine o preço que paga no final do mês se o seu consumo for de 20 m^3.

b) No mês de Maio a Ana pagou 16 € de água, qual foi o consumo mensal?

c) Complete a tabela ao lado.

Consumo, em m^3 (x)		20	
Custo, em € (y)	16		

d) Descreva o modo como variam as duas grandezas.

e) Represente graficamente os valores referentes a esta tabela.

f) Sendo x o consumo mensal em m^3, indique uma expressão analítica que represente o custo mensal do consumo de água (y).

g) Num mês a Joana e a Ana pagaram o mesmo valor de água. Quantos m^3 de água terão que ter consumido.

h) Em relação aos gastos que se tem com o consumo de água, onde é preferível viver? Lisboa ou Bragança? Justifique a resposta.

Tarefa 3

Um vendedor de automóveis recebe mensalmente, além do seu ordenado fixo, um prémio por cada carro vendido. A tabela que se segue contém o valor total, em euros, recebido pelo vendedor nos primeiros quatro meses deste ano.

N.º de carros vendidos	3	5	15	14
Valor total recebido	2000	2500	5000	4750

a) Qual é o valor do ordenado fixo do vendedor e o valor do prémio que obtém por cada carro vendido?

b) Existe proporcionalidade direta? Justifica.

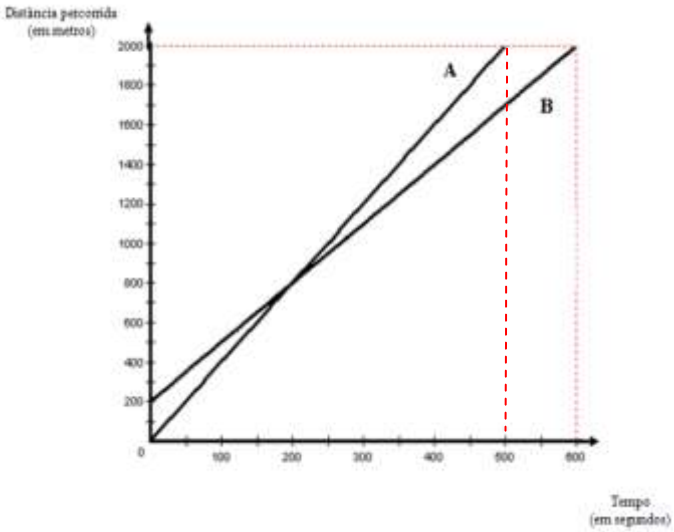
c) Escreva uma expressão algébrica que represente esta função.

d) Se vender 2 carros quanto recebe o vendedor no final do mês?

e) Se receber 1750 euros no final do mês, quantos carros vendeu?

Tarefa 4

A Rita e o Miguel fizeram uma corrida numa pista de atletismo com 2000 m. Para tornar a corrida mais justa, o Miguel disse à Rita que a deixaria partir 200 m à sua frente, afirmando que, mesmo assim, conseguiria vencer.



O gráfico em baixo mostra uma previsão sobre o modo como decorre a corrida.

a) Acha que o Miguel tem razão?

b) Quantos metros por cada segundo percorre o Miguel durante a corrida?

c) Quantos metros por cada segundo percorre a Rita durante a corrida?

d) Escreva as expressões algébricas que representem estas funções.

e) Que distância percorre o Miguel ao fim de 100 segundos?

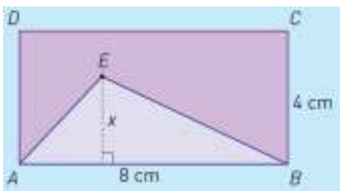
f) Que distância percorre a Rita ao fim de 100 segundos?

g) Quanto tempo demora o Miguel a percorrer 1400 metros?

h) Quanto tempo demora a Rita a percorrer 1400 metros?

i) Ao fim de quanto tempo o Miguel ultrapassa a Rita?

Tarefa 5



Na figura ao lado, sobre um dos lados do retângulo [ABCD], construiu-se um triângulo [ABE], onde x representa a sua altura quando consideramos a base [AB].

a) Mostre que a área do polígono colorido, [AEBCD], é dada em função de x por: $A(x) = 32 - 4x$.

b) Qual a área desse polígono se $x=4$? Desenhe este polígono.

c) Quando a área for 26, qual o valor de x?

d) A variável x pode tomar que valores?

Anexo 8 - Exercícios e tarefas do manual

TAREFA 3 Funções afim

1. Considera as seguintes funções do tipo $y = kx + b$ com $k = 2$.

$$y = 2x - 2,\ y = 2x + 3,\ y = 2x \text{ e } y = 2x - 1$$

1.1. Num mesmo referencial, representa graficamente as quatro funções.

1.2. Qual é a posição relativa das retas que representam as funções?

1.3. O que têm em comum as expressões algébricas que definem as funções?

1.4. Indica as coordenadas dos pontos de interseção de cada uma das retas com o eixo das ordenadas.

1.5. Compara a expressão algébrica de cada uma das funções com a ordenada do ponto de interseção da reta que a representa com o eixo Oy. O que observas?

2. Considera as seguintes funções afim.

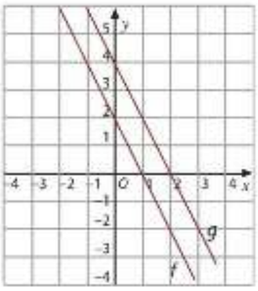
$$y = x + 1,\ y = x - 4,\ y = 3x \text{ e } y = 3x - 2$$

2.1. Num mesmo referencial, representa graficamente as quatro funções.

2.2. Agrupa as quatro funções, duas a duas, tendo em conta a posição relativa das retas que as representam.

2.3. O que há de comum entre as expressões algébricas que definem cada um dos pares de funções que consideraste na alínea anterior?

3. Observa a representação gráfica das funções *f* e *g*.



3.1. Escreve a imagem de 0 para cada uma das funções.

3.2. Completa, no teu caderno:

a) $f(?) = -2$　　**b)** $g(1) = ?$　　**c)** $f(0) - g(3) = ?$

3.3. Sabendo que a função *f* fica definida pela expressão algébrica $y = -x + 2$, indica uma expressão algébrica que defina a função *g*.

4. Considera as seguintes funções do tipo $y = kx + b$, com $b = 1$.

$$y = 2x + 1,\ y = 4x + 1,\ y = -3x + 1 \text{ e } y = -x + 1$$

4.1. Num mesmo referencial, representa graficamente as quatro funções.

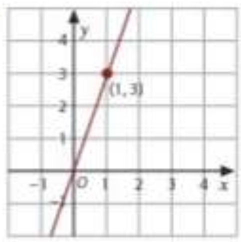
4.2. Descreve o efeito do valor do parâmetro *k* no crescimento e no decrescimento das funções.

4.3. Representa graficamente a função $y = 5$ e relaciona essa representação com o valor do parâmetro *k*.

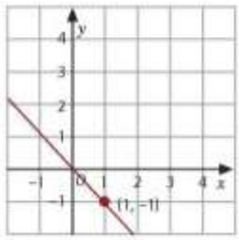
Magro, Fidalgo e Louçano (2011), p. 98

2 Indica a expressão algébrica que define cada uma das funções representadas graficamente.

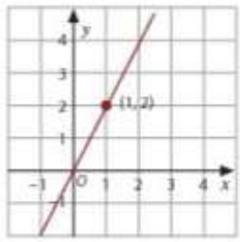
2.1.



2.2.



2.3.



4 Representa, no mesmo referencial cartesiano, as funções $y = 2x$ e $y = -4x$.

7 Seja f uma função de proporcionalidade direta e $\frac{3}{4}$ a respetiva constante de proporcionalidade.

7.1. Escreve a expressão algébrica que define a função f.

7.2. Calcula $f\left(\frac{4}{3}\right)$ e $f(-5)$.

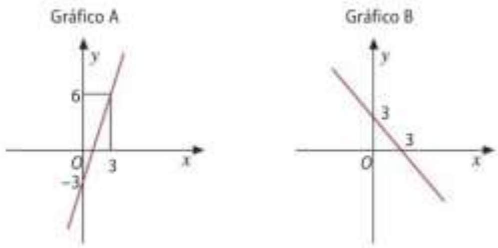
7.3. Determina x de tal forma que $f(x) = 12$.

7.4. Representa graficamente a função.

7.5. Resolve graficamente a seguinte: equação: $f(x) = 3$

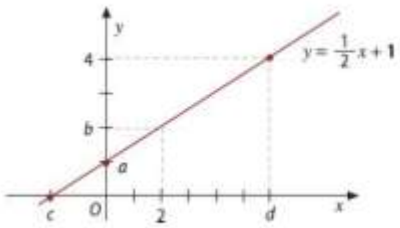
Magro, Fidalgo e Louçano (2011), p. 108

2 Considera a função definida por $f(x) = x + 3$.
Nem o gráfico A nem o gráfico B representam a função f.
Apresenta, para cada um dos gráficos A e B, uma razão que te permita garantir que os gráficos não representam a função f.



Adaptado de *Exame Nacional de Matemática*, 3.º Ciclo, 2010 – 2.ª chamada

4 No referencial seguinte está representada a função $y = \frac{1}{2}x + 1$.



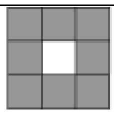
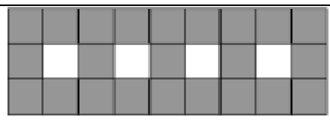
Determina os valores de a, b, c e d.

Magro, Fidalgo e Louçano (2011), p. 112

Anexo 9 – Minificha de avaliação

1. Considere as seguintes figuras de uma sequência:

a) Complete a tabela:

Desenho	 Figura1	Figura 2	Figura 3	 Figura 4
Número de quadradinhos cinzentos	8			23

b) Assinale qual das expressões algébricas não pode ser usada para calcular a quantidade de quadradinhos cinzentos em qualquer figura (n representa o número de ordem da figura).

[**A**] $2n+3(n+1)$ [**B**] $5(n-1)+8$ [**C**] $8+5n$ [**D**] $3(2n+1)-n$

c) Qual a quantidade de quadradinhos cinzentos da figura número 21? Explica o seu raciocínio.

d) Existe alguma figura com 132 quadradinhos cinzentos? Se sim, indica o número de ordem da figura, se não, explica porquê.

e) Qual a expressão algébrica que representa a quantidade de quadradinhos (brancos mais cinzentos) em qualquer figura?

2. O valor monetário de um computador diminui à medida que o tempo passa.

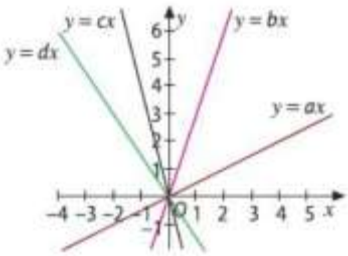
Admite que o valor, v, de um computador, em euros, t anos após a sua compra, é dado por: $v=-300t+2100$

a) Tendo em conta esta situação, qual é o significado real do valor 2100?

b) Determine a percentagem de **desvalorização** do computador desde o momento da sua compra até dois anos após a mesma. Arredonde o resultado às unidades.

3. No referencial estão representadas quatro funções lineares.

Coloque por ordem **crescente** os valores das constantes de proporcionalidade direta (a, b, c e d).

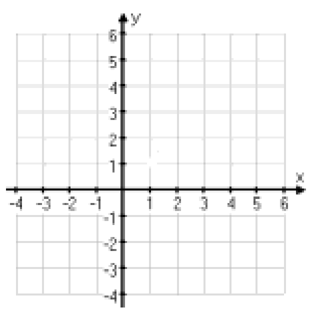


4. Considera a função afim $f(x)=\dfrac{5}{2}x-2$

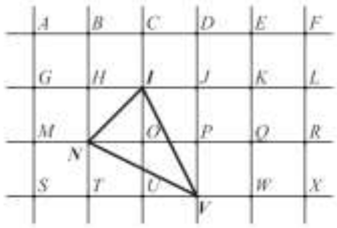
a) Represente graficamente a função f no referencial cartesiano ao lado.

b) Calcule $f(-4)$

c) Quando a imagem é $\dfrac{5}{3}$, qual é o objeto?



Anexo 10 – Ficha de revisões



1. Na figura, está representado um quadriculado.

a) Considera a translação em que o transformado do ponto *H* é o ponto *D*. Qual é, por meio dessa translação, o transformado do triângulo [*NIV*]?

b) Os pontos *J* e *F* são vértices de um certo quadrado, não representado na figura. Sabe-se que [*JF*] é um lado desse quadrado. Qual dos pontos seguintes também é vértice desse quadrado? (Transcreve a opção correta) **(A)** *Q* **(B)** *R* **(C)** *W* **(D)** *X*

2. Admite que a velocidade média da *Voyager 2* é 15km/s. Qual é a velocidade média da *Voyager 2* em km/h? Apresenta a resposta em notação científica. Justifica.

3. Seja k um número negativo. Qual das expressões seguintes representa, também, um número negativo? (Transcreve a letra da opção correta) **(A)** k^2 **(B)** k^3 **(C)** $-k$ **(D)** $-k^3$

4. Num campeonato de futebol cada equipa conquista:

• 3 pontos por cada vitória; • 1 ponto por cada empate;

• 0 pontos por cada derrota.

Na tabela seguinte está representada a distribuição dos pontos obtidos por uma equipa em 30 jogos do campeonato.

Pontos	Número de jogos
3	15
1	9
0	6

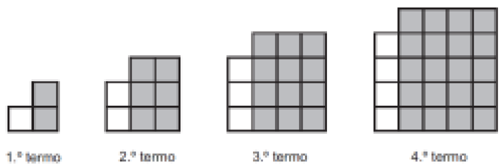
a) Qual foi a média de pontos, por jogo, desta equipa? Justifica

b) Qual foi a mediana dos pontos ganhos? Justifica

5. Na última aula do 3ºP, a turma da Margarida ofereceu à professora de Matemática um ramo constituído por túlipas vermelhas e túlipas brancas. O ramo, formado por 18 túlipas, tinha mais 4 túlipas vermelhas do que brancas. Quantas túlipas brancas tinha o ramo que a turma da Margarida ofereceu à professora? Justifica.

6. Resolve a equação seguinte.: $$2(1-x)+\frac{x+1}{2}=\frac{x}{3}-(x-3)$$

7. Na figura, estão representados os quatro primeiros termos de uma sequência de conjuntos de azulejos quadrados que segue a lei de formação sugerida na figura. Os azulejos são todos iguais, sendo uns brancos e outros cinzentos.

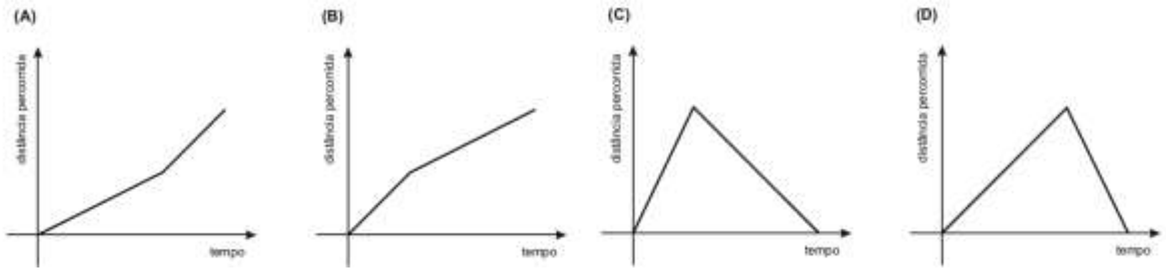


a) Qual é o número total de azulejos do 9.º termo da sequência? Justifica.

b) Qual a expressão que representa o número total de azulejos para cada termo n? (Transcreve a letra correta) **(A)** $(n+1)\times(n+1)-1$ **(B)** $n\times n-1$ **(C)** n **(D)** $n\times(n+1)$

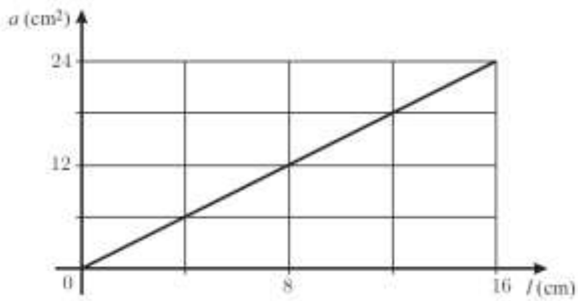
8. Considera f uma função definida por f(x) = 2x-5. Qual é a imagem de 3 por meio da função f ? (Transcreve a letra da opção correta) **(A)** –4 **(B)** –1 **(C)** 1 **(D)** 4

9. O Pedro saiu de casa para dar um passeio de bicicleta. À ida, manteve uma velocidade constante. No regresso, manteve também uma velocidade constante, mas deslocou-se mais **rapidamente** do que à ida.
Qual dos gráficos seguintes pode representar a **distância percorrida** pelo Pedro, no seu passeio, em função do tempo que decorreu depois de ele sair de casa? (Transcreve a letra da opção corecta)



10. Quando ocorre uma descarga elétrica durante uma trovoada, primeiro, vê-se o relâmpago e, depois, ouve-se o trovão. Para estimar a distância, d, em metros, entre o observador e a descarga elétrica, multiplica-se por 340 o tempo, t, em segundos, que decorre entre o instante em que se vê o relâmpago e o instante em que se ouve o trovão. Qual das expressões seguintes representa a relação entre as variáveis d e t?(Transcreve a opção correta) **(A)** $d = 340\times t$ **(B)** $t = 340\times d$ **(C)** $t = 340-d$ **(D)** $d = 340 + t$

11. Seja k um número positivo. Considera todos os retângulos de comprimento igual a k cm e largura compreendida entre 0cm e 16cm O gráfico da figura traduz a relação entre a largura (l) e a área (a) desses retângulos.



a) Qual é a área, em cm^2, de um retângulo que tem largura igual a 5 cm? Justifica.

b) Um dos retângulos considerados tem área igual a $18cm^2$ Qual é o perímetro, em cm, desse retângulo? Mostra como chegaste à tua resposta.

12. Seja j a função afim definida algebricamente por $j(x) = \frac{5}{2} - 3x$.

a) Calcula $j(0) - 3j(4)$.

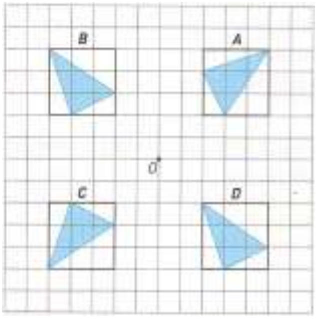
b) Comenta a seguinte afirmação: “A função j é representada graficamente por uma reta, que é paralela à reta que representa graficamente a função $y = 3x - 3$.”

c) Determina as coordenadas do ponto onde a reta que representa graficamente a função j interseta o eixo das abcissas (Ox).

13. Resolve graficamente o sistema ao lado $\begin{cases} x + y = 1 \\ y + x = 2 \end{cases}$

Anexo 11 –Ficha de avaliação

1. Em relação à figura ao lado, qual das afirmações é verdadeira?
(Escolha a opção correta)



(A) A figura B é obtida segundo uma translação da figura A.

(B) A figura C é obtida segundo uma rotação da figura B.

(C) A figura D é obtida segundo uma reflexão deslizante da figura

(D) A figura C é obtida segundo uma reflexão da figura B.

2. Na tabela seguinte, estão as classificações dos alunos de uma turma do 10.º ano na disciplina de Matemática. O número de alunos que tiveram classificação de 10 valores e o número de alunos que tiveram classificação de 12 valores estão representados pela letra *a*.

Classificações (em valores)	9	10	12	14	15	18
Número de alunos	3	*a*	*a*	5	3	3

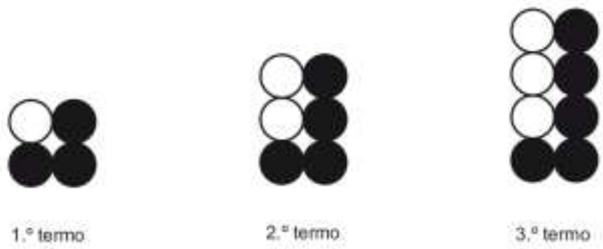
a) Determine a média das classificações dos alunos que tiveram classificação superior a 12 valores. Apresente os cálculos efetuados e arredonde o resultado às **décimas**.

b) Admita que a mediana das classificações dos alunos da turma é 13 valores.
Qual é o valor de *a*? Justifique a sua resposta.

3. Seja *n* um número natural, diferente de 1. Admita que $n^3 = k$.
Qual é o valor de n^{-3}?
(Escolha a opção correta)

A) $-k$ **B)** k **C)** $\frac{1}{k}$ **D)** $-\frac{1}{k}$

4. Na figura, estão representados os três primeiros termos de uma sequência de conjuntos de bolas que segue a lei de formação sugerida na figura.



a) Quantas bolas são necessárias para construir o 7.º termo da sequência?

b) Há um termo da sequência que tem um total de 108 bolas. Quantas bolas pretas tem esse termo? Mostre como chegou à sua resposta.

5. Em relação ao sistema de equações ao lado podemos afirmar que:

$$\begin{cases} y - 3x = 0 \\ x + 2y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

A) O par ordenado (0,0) é solução das duas equações.

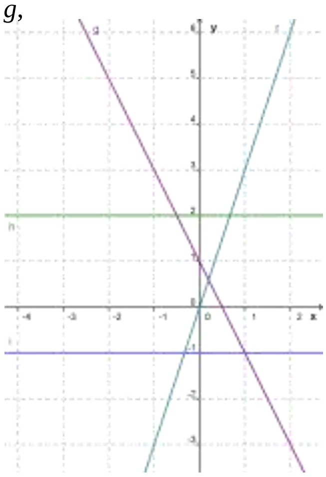
B) O par ordenado (0,0) é solução apenas da primeira equação.

C) O par ordenado (0,0) é solução apenas da segunda equação.

D) O par ordenado (0,0) não é solução de nenhuma das equações.

(Escolha a opção correta)

6. Na figura ao lado pode observar as representações gráficas das funções *f*, *g*, *h* e *i*.



a) Estabeleça a correspondência entre as representações gráficas das funções f, g, h e i e as respetivas expressões algébricas.

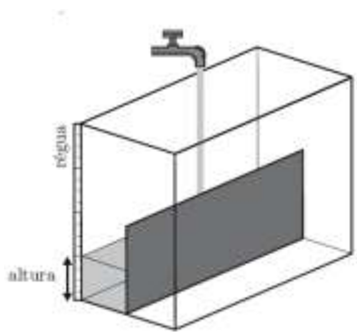
Expressões	Funções
$y = 2$	f
$y = 3x$	g
$y = -1$	h
$y = -2x + 1$	i

b) Recorrendo às expressões algébricas e às respetivas representações gráficas dadas na alínea anterior escreva um sistema de equações que seja:

b₁) possível e determinado **b₂)** impossível

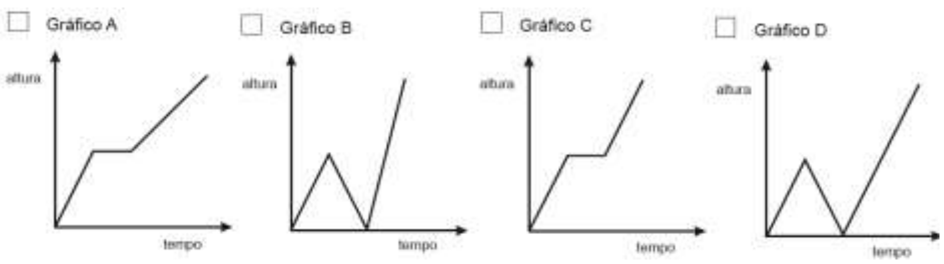
c) Represente graficamente a função afim definida pela expressão $y = -\dfrac{x}{2} + 1$. Apresente os cálculos efetuados.

7. Tal como a figura ilustra, o aquário está dividido por uma placa, **apenas até metade da sua altura**. Num determinado instante, uma torneira começa a deitar água no aquário, como se mostra na figura. A quantidade de água que sai da torneira, por unidade de tempo, é constante. O aquário está inicialmente vazio, e o processo termina quando o aquário fica cheio de água.



Em qual dos gráficos seguintes pode estar representada a relação entre o tempo decorrido desde que a torneira começou a deitar água e **a altura que a água atinge na régua**?

Indique qual a opção correta e **justifique** a sua escolha.

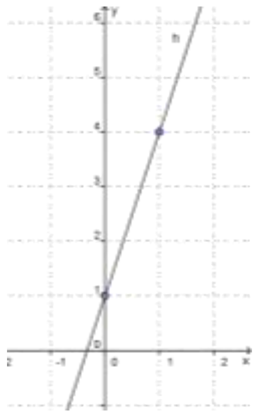


8. Na figura pode observar-se a representação gráfica da função afim *h*.

Qual a expressão algébrica que define a função h?

(Escolha a opção correta)

A) $y = 3x + 1$ **B)** $y = 4x + 1$ C) $y = 3x + 4$ **D)** $y = 3x - 0{,}5$



9. O aparelho de ar condicionado de uma sala de cinema teve uma avaria durante a exibição de um filme. A temperatura, *C*, da sala, *t* horas após a avaria e até ao final do filme, pode ser dada, aproximadamente, pela expressão: $C = 21 + 2t$, com *C* expresso em graus centígrados e *t* expresso em horas.

a) Na sala, qual era a temperatura, em graus centígrados, uma hora após a avaria? Explique como chegou à sua resposta.

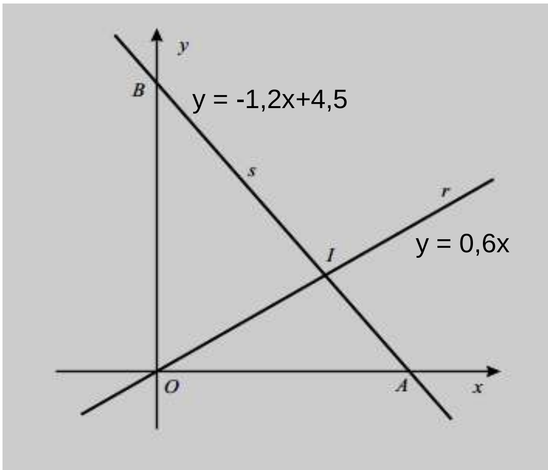
b) Qual foi, na sala, o aumento da temperatura por hora, em graus centígrados?

c) No final do filme, a temperatura na sala era de 24 graus centígrados. Há quanto tempo tinha ocorrido a avaria? Apresente o resultado **em minutos.**

10. Na figura estão representadas, num referencial cartesiano, as retas *r* e *s*.

Sabe-se que:

- a reta *r* é definida por $y = 0{,}6x$
- a reta *s* é definida por $y = -1{,}2x + 4{,}5$
- o ponto *A* é o ponto de interseção da reta *s* com o eixo das abcissas
- o ponto *B* é o ponto de interseção da reta *s* com o eixo das ordenadas
- o ponto *I* é o ponto de interseção das retas *r* e *s*



a) Quais são as coordenadas do ponto *B?*

b) Qual a medida do comprimento do segmento de reta [*OA*]? Apresente todos os cálculos efetuados.

c) Determine a área do triângulo [OBI]. Mostre como chegou à sua resposta. *<u>Sugestão</u>: Comece por determinar a abcissa do ponto I.*

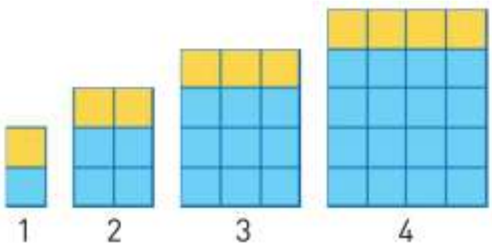
(**Caso não tenha resolvido** a alínea anterior, considere que o comprimento do segmento de reta [*OA*] é 3,5).

Anexo 12 – Tarefas propostas nas entrevistas

Tarefa 1 – Sequências pictóricas

Observe as figuras ao lado.

Considere a sequência do número total de quadradinhos.



- Consegue identificar alguma regularidade?
- Quantos quadradinhos terão a figura 6?
- Existe alguma figura com 100 quadradinhos?
- Consegue descrever uma regra que relacione o número da figura com o número de quadradinhos e que funcione para todas as figuras?

Tarefa 2 – Sequências numéricas

Observe a sequência de números da tabela.

- Consegue identificar alguma regularidade?
- Qual o valor da sequência na 7ª linha?
- Existe alguma linha com o valor da sequência zero?
- Consegue descrever uma regra que relacione o número da linha com o valor da sequência que funcione sempre?

Número da linha	Valor da sequência
1	30
2	27
3	24
4	21
5	18

Tarefa 3 – Funções em tabela

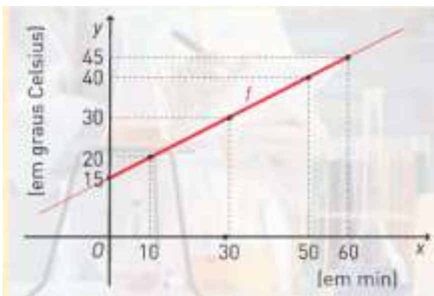
Observe a tabela ao lado.

- Descreva como variam as duas grandezas x e y?
- Qual o valor de y quando x= - 1,5?
- Existe algum valor de x que corresponda a y= 2,75?
- Consegue descrever uma regra que relacione x e y e que funcione para qualquer valor da tabela?

x	y
0	30
0,5	27
1	24
1,5	21
2	18

Tarefa 4 – Funções representadas graficamente

Na figura está representada graficamente a função f que relaciona a temperatura de uma substância ao longo do tempo durante uma experiência do laboratório realizada durante uma hora.



- Descreva como variam as duas grandezas x e y?
- Qual o valor da temperatura passados 20 minutos?
- Quando a temperatura for 35 graus, quantos minutos terão passado?
- Consegue descrever uma regra que relacione x e y e que funcione sempre?